

Zufallsflächen und Clusterentwicklungen
in Gitter-Yang-Mills-Theorien

Christian Borgs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Zufallsflächen und Clusterentwicklungen
in Gitter-Yang-Mills-Theorien

Dissertation
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Christian Borgs
aus Düsseldorf

München, 19. September 1986

1. Gutachter: Professor Dr. H.P. Dürr

2. Gutachter: Professor Dr. H. Spohn

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Januar 1987

Meinen Eltern

in Dankbarkeit gewidmet

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit betrachte ich reine Gitter-Yang-Mills-Theorien, überwiegend bei starker Kopplung, und zwar sowohl auf einem symmetrischen Raum-Zeit-Gitter, als auch auf einem reinen Raum-Gitter bei kontinuierlicher Zeit.

Nach einem einführenden Kapitel über die Clusterentwicklung von Osterwalder und Seiler untersuche ich das asymptotische Verhalten des Quark-Antiquark Potentials in der stark gekoppelten Theorie auf dem symmetrischen Gitter. Ich leite zunächst eine Darstellung der Erwartungswerte großer "Wilson-Loops" als Zustandssumme eines Zufallsflächensystems her. Die Mayer-Entwicklung für den Logarithmus dieser Zustandssummen erlaubt dann diverse Aussagen über das asymptotische Verhalten des Quark-Antiquark-Potentials. Insbesondere wird gezeigt werden, daß die Saitenspannung, als Funktion von $1/g^2$ bis auf einen führenden Beitrag $\log g^2$ in einer Umgebung von Null analytisch ist (g^2 ist die Kopplungskonstante). Außerdem wird der Beweis dafür erbracht, daß unendlich schwere Quarks für Darstellungen q , die das Zentrum der Eichgruppe trivial darstellen, kein Confinement aufweisen.

Im dritten und letzten Kapitel untersuche ich schließlich die Gitter-Yang-Mills-Theorien mit kontinuierlicher Zeit. Es werden zunächst mehr konzeptionelle Fragen diskutiert, wie die Existenz eines Hamiltonoperators im thermodynamischen Limes und die Lokalitätseigenschaften der Zeitentwicklung. Unter Verwendung der Duhamel-Formel leite ich dann eine Clusterentwicklung für die stark gekoppelte Theorie her. Für beliebige Temperaturen $\beta^{-1} \geq 0$ zeige ich Confinement im Sinne von Polyakov, Flächen-Gesetz für horizontale Wilson-Loops und exponentielles Clustern, vorausgesetzt, $\operatorname{Re} g^2$ ist hinreichend groß (die entsprechende Schranke $\bar{g}^2$ hängt von β ab).

Für endliche abelsche Gruppen zeige ich die Existenz von drei Phasen bei hoher Temperatur: der oben erwähnten Confinement-Phase, einer Phase mit Deconfinement im Sinne von Polyakov aber weiter gültigem Flächen-Gesetz und einer eingefrorenen Phase mit Deconfinement im Sinne von Polyakov und Umfangs-Gesetz für horizontale Wilson-Loops.

INHALTSVERZEICHNIS

<u>Zusammenfassung</u>	I
<u>Einleitung</u>	III
<u>Kapitel 1: Die Clusterentwicklung für symmetrische Gitter</u>	1
1.1 Gitter-Yang-Mills-Theorien, Confinementkriterien	2
1.2 Die Clusterentwicklung für lokale Observable	8
1.3 Confinement für ∞ -schwere Quarks	16
<u>Kapitel 2: Die Entwicklung für die Saitenspannung</u>	26
2.1 Einführung	26
2.2 Die Geometrie der Zufallsfläche	35
2.3 Geladene Zufallsflächen	54
2.4 Die Konvergenz der Clusterentwicklung für $\log \widetilde{W}_q(C)$	68
2.5 Verzierte Zufallsflächen	84
2.6 Zusammenfassung und Diskussion zu Kapitel 2	92
<u>Kapitel 3: Gittereichtheorien mit kontinuierlicher Zeit</u>	104
3.1 Definition der Theorie, Hamiltonoperatur und Zeitentwicklung	105
3.2 Die Clusterentwicklung für große g^2	117
3.3 Die Konvergenz der Entwicklung aus 3.2 und ihre Konsequenzen	128
3.4 Endliche Gruppen: Deconfinement vs. "Freezing"	146
3.5 Zusammenfassung und Diskussion zu Kapitel 3	160
<u>Schlußbemerkungen</u>	167
<u>Anhang</u>	170
<u>Literaturverzeichnis</u>	189

EINLEITUNG

Trotz der in letzter Zeit immer mehr steigenden Popularität der "String"-Theorien (siehe z.B. [Schwarz, 1985]) sind lokale Quantenfeldtheorien mit lokaler Eichsymmetrie noch immer die meist betrachteten Theorien zur Beschreibung der experimentell beobachteten Phänomene, sowohl der starken als auch der elektro-schwachen Wechselwirkung. Die störungstheoretische Behandlung dieser Theorien hat diverse experimentelle Ergebnisse korrekt beschreiben oder vorhersagen können, und insbesondere auch - zusammen mit Renormierungsgruppenmethoden - das quasi-freie Verhalten der Quarks bei kurzen Abständen (asymptotische Freiheit) reproduziert. Nicht erklären können hat die Störungstheorie dagegen die Tatsache, daß experimentell keine freien Quarks beobachtet wurden.

Zur Behandlung dieses "Confinement"-Problems hat Wilson 1974 die Gittereichtheorien eingeführt. Da das Gitter die meisten Raum-Zeit-Symmetrien relativistischer Feldtheorien zerstört, kann die Gittereichtheorie nicht als realistische Feldtheorie angesehen werden. Man mag jedoch mit Wilson argumentieren, daß Renormierungsgruppeneffekte in asymptotisch freien Theorien zu einer stark gekoppelten, effektiven Theorie bei großen Abständen führen sollten. Man kann nicht erwarten, daß diese Theorie exakt von der Wilson'schen Form ist, aber man mag hoffen, daß sie gut durch die Wilson'sche Theorie approximiert wird. Zumindestens wenn man hauptsächlich an den speziellen Effekten exakter Eichinvarianz in stark gekoppelten Eichtheorien interessiert ist, erscheint die Betrachtung stark gekoppelter Gittereichtheorien also durchaus sinnvoll.

Es wäre natürlich wünschenswert, die obige Argumentation zu präzisieren. Man könnte beispielsweise wie folgt vorgehen: man betrachte die Gittertheorie zunächst nicht als eine effektive Theorie, sondern als regularisierte Version der noch zu konstruierenden Kontinuumstheorie. Man lasse dann die Gitterkonstante gegen Null gehen, wobei die Kopplungskonstanten und eventuell auch die Observablen der Theorie zu renormieren sind. Zu zeigen ist, daß dieser "Kontinuumslimit" existiert und eine sinn-

volle Theorie beschreibt. Insbesondere ist die euklidische bzw. relativistische Invarianz der resultierenden Theorie zu zeigen. In einem zweiten Schritt benutze man die Methode der Block-Spin-Transformationen, um eine effektive Theorie auf dem Einheitsgitter zu erhalten. Es ist dann zu überprüfen, ob die effektive Theorie tatsächlich stark gekoppelt ist und inwieweit sie gut durch die Wilson'sche Theorie approximiert wird.

Leider ist dieses Vorgehen im Moment und wohl auch bis auf weiteres ein aussichtsloses Unterfangen. Zwar hat die konstruktive Feldtheorie in letzter Zeit enorme Fortschritte gemacht und insbesondere die ersten renormierbaren, aber nicht superrenormierbaren Feldtheorien konstruieren können ([Gawedzki, Kupianen, 1985],[Feldman et al., 1985]). Aber die Konstruktion vierdimensionaler Eichtheorien ist wohl noch in weiter Ferne, sieht man einmal von [Federbush, 1993] und gewissen Teilergebnissen von Balaban [1986] ab. In jedem Fall sind die bisher verwendeten Methoden nicht zur Analyse des Confinement-Problems geeignet, da sie wesentlich ausnutzen, daß die Theorie nur schwach von der freien Theorie abweicht.

Wie dem auch sei, im folgenden werde ich mich nicht mit der Problematik des Kontinuumslimites beschäftigen; stattdessen möchte ich die stark gekoppelte Theorie als (zugegebenermaßen grobes) Modell für Confinement betrachten, und einige bisher offene, aber wichtige Fragen im Zusammenhang mit dem Confinement-Problem behandeln.

Der erste Problemkreis betrifft das asymptotische Verhalten des Quark-Antiquark-Potentials und insbesondere die Analytizitätseigenschaften der Saitenspannung σ_q für symmetrische Raum-Zeit-Gitter. Während für die Erwartungswerte lokaler Observablen eine (für große Kopplungskonstanten g^2) konvergente Entwicklung zur Verfügung steht [Osterwalder, Seiler, 1978], die insbesondere die Analytizität dieser Erwartungswerte als Funktion von $1/g^2$ zur Folge hat, war bisher keine konvergente Entwicklung für die Saitenspannung bekannt (die von Münster skizzierte Clusterentwicklung für σ_q ist divergent, siehe Abschnitt 2.1).

Um die zugrundeliegende Problematik zu erläutern, betrachte ich die Erwartungswerte großer "Wilson-Loops". σ_q geht aus diesen mittels

$$\sigma_q := - \lim_{t, \ell \rightarrow \infty} \frac{1}{t\ell} \log \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle \quad (0.1)$$

hervor, wobei $C_{t\ell}$ die Randkurve eines Rechtecks $S_{t\ell}$ der Kantenlänge t resp. ℓ in Zeit- resp. Raumrichtung bezeichnet. $W_q(C_{t\ell})$ ist die "Wilson-Loop-Observable" zum Loop $C_{t\ell}$. Zwar ist bekannt, daß $\langle W_q(C_{t\ell}) \rangle > 0 \forall t, \ell < \infty$ analytisch in $1/g^2$ ist (siehe oben), aber dies impliziert natürlich nicht die Analytizität von σ_q .

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die Clusterentwicklung von Osterwalder und Seiler. Diese liefert in natürlicher Weise eine Darstellung von $\langle W_q(C_{t\ell}) \rangle$ als Summe über Zufallsflächen mit Rand $C_{t\ell}$. Es liegt nun nahe, die Abweichungen von der Minimalfläche mit Rand $C_{t\ell}$ als (wie sich herausstellen wird) schwach wechselwirkendes Gas von Teilchen zu beschreiben, die auf $S_{t\ell}$ leben. Die Mayer-Entwicklung für dieses Teilchensystem liefert dann den Logarithmus $\log \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle$ in einer Form, die es gestattet, den Grenzwert (0.1) auszuführen. Dies ist der Gegenstand von Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit.

Ich kann die Details in dieser Einleitung natürlich nicht alle beschreiben, aber ich möchte erwähnen, daß es sich im wesentlichen um eine Kombination der Methoden von Dobrushin [1972] mit denen von Bricmont und Fröhlich [1985a,b] handelt (Dobrushin hat die Trennungsfläche zwischen Phasen verschiedener Magnetisierung im Ising-Modell untersucht; Bricmont und Fröhlich verwenden Zufallspfade, um zu Aussagen über das Teilchenspektrum diverser Gittertheorien zu kommen). Nach diversen technischen Komplikationen (die unter anderem von der nicht-abelschen Struktur der Eichgruppe herrühren) ergeben sich Aussagen über das asymptotische Verhalten des Quark-Antiquark-Potentials, Analytizitätseigenschaften der Saitenspannung, Ornstein-Zernike Korrekturen für das Quark-Antiquark-Potential bei endlicher Temperatur, und vieles mehr (siehe Abschnitt 2.6). Eine kurze Einführung in die verwendeten Methoden findet sich in Abschnitt 2.1.

Das zweite Problem betrifft den Limes kontinuierlicher Zeit. In diesem Limes wird aus der Wilson'schen Theorie die Gittereichtheorie von Kogut und Susskind ([Creutz, 1977], siehe auch [Borgs, Seiler, 1983]). Hier wird nur der Raum diskretisiert; statt über ein euklidisches Funktionalintegral ist die Theorie durch Vorgabe eines Hamiltonoperators H definiert.

Ein offensichtlicher Vorteil dieses Vorgehens besteht in der direkten quantenmechanischen Interpretierbarkeit. Außerdem erweist es sich für das Studium der Theorie bei hoher Temperatur häufig als praktischer, da die maximal mögliche Temperatur hier keinerlei Einschränkungen unterliegt (in der Wilson'schen Theorie kann man die Temperatur nie größer als die inverse Gitterlänge in Zeitrichtung wählen). Erkauft werden diese Vorteile unter anderem durch den Nachteil, daß die (euklidische) Raum-Zeit-Symmetrie der Kontinuumsstheorie hier noch krasser verletzt ist, als in der Wilson'schen Theorie.

Während die Wilson'sche Theorie analytisch inzwischen relativ gut verstanden ist (bis auf den Kontinuums-limes), sind nur wenige^{*)} strenge Resultate auf die Theorie mit kontinuierlicher Zeit übertragbar. Insbesondere war bisher nicht bewiesen, daß die Theorie eine Confinementphase bei starken Kopplungen besitzt (es ist bisher nicht gezeigt, und dürfte direkt auch schwer zu zeigen sein, daß die Entwicklung von Kogut und Susskind [1975] für starke Kopplungen konvergiert).

Der Behandlung dieses Problems ist der zweite Teil dieser Arbeit gewidmet. Unter Verwendung der Duhamel-Entwicklung (siehe z.B. [Seiler, Simon, 1976]) wird es möglich sein, die Theorie auf ein $d+1$ dimensionales Polymersystem abzubilden (d ist die Raumdimension) und die Konvergenz der entsprechenden Mayer-Entwicklung zu zeigen. Es folgen diverse strenge Resultate für starke Kopplungen, insbesondere Confinement im Sinne von Polyakov, Flächen-Gesetz für horizontale Wilson-Loops und die Existenz eines "Massengaps".

^{*)} Sie betreffen alle das Verhalten bei hohen Temperaturen, siehe z.B. [Borgs, Seiler, 1983], [Tomboulis, Yaffe, 1985], [Borgs, 1985].

Auf der anderen Seite ist bekannt, daß die Theorie (auch) im β -Kontinuum kein Confinement mehr aufweist, wenn $g^2 < g_2^2(\beta) = \text{const } \beta^{-1}$ ist [Borgs, Seiler 1983]. Dies heißt jedoch nicht unbedingt, daß das Flächen-Gesetz für horizontale Wilson-Loops ungültig wird. Tatsächlich kann man zeigen, daß das Flächen-Gesetz zumindestens immer dann gilt, wenn $g^2 \beta^{-1} \gg 1$ ist [Borgs, 1985]. Bei hinreichend hohen Temperaturen $\beta^{-1} > 0$ gibt es also einen Bereich $g_1^2(\beta) < g^2 < g_2^2(\beta)$, in der die Theorie gleichzeitig Deconfinement im Sinne von Polyakov und Flächen-Gesetz für horizontale Wilson-Loops aufweist.

Für diskrete Gruppen sollte es noch eine weitere Phase, die "eingefrorene" Phase mit Deconfinement im Sinne von Polyakov und Umfangs-Gesetz für horizontale Wilson-Loops geben. Für endliche Gruppen (aus technischen Gründen muß ich annehmen, daß sie außerdem abelsch sind) werde ich die Existenz der eingefrorenen Phase zeigen, und zwar für beliebige Temperaturen $\beta^{-1} \geq 0$.

Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt: Zunächst bespreche ich die Clusterentwicklung von Osterwalder und Seiler in der Form von [Seiler, 1982], auch um bei dieser Gelegenheit einige kleine Fehler auszubessern, die sich in die Darstellung von Seiler eingeschlichen haben (Kapitel 1). In Kapitel 2 leite ich die Zufallsflächenentwicklung für die Saitenspannung her und beweise ihre Konvergenz. Die resultierenden Theoreme für das Quark-Antiquark-Potential werden formuliert und diskutiert. Die wesentlichen Ideen und Resultate dieses Kapitels sind in 2.1 und 2.6 enthalten, Abschnitt 2.2 bis 2.5 sind den teilweise relativ komplizierten technischen Details vorbehalten.

Kapitel 3 beginnt mit einem einleitenden Abschnitt über die Gittereichentheorien mit kontinuierlicher Zeit, in dem insbesondere die Existenz des Hamilton-Operators im thermodynamischen Limes und die Lokalitätseigenschaften der Zeitentwicklung diskutiert werden. Abschnitt 3.2 und 3.3 behandeln die Entwicklung in der Confinement-Phase, Abschnitt 3.4 die Entwicklung in der "Freezing"-Phase. Schließlich werden die wichtigsten Resultate zusammengefaßt und diskutiert (Abschnitt 3.5).

In den Anhängen beweise ich zunächst einige Ungleichungen zwischen verschieden definierten Saitenspannungen (Anhang A), um dann einige Standardresultate über die Mayer-Entwicklung für Polymersysteme in knapper Form erneut herzuleiten (Anhang B und C). Schließlich formuliere ich einige in dieser Arbeit benötigte Sätze aus der Darstellungstheorie kompakter Gruppen (Anhang D); die Beweise für diese Sätze finden sich in der Literatur.

KAPITEL I

DIE CLUSTERENTWICKLUNG FÜR SYMMETRISCHE GITTER

Hoch- und Tieftemperaturentwicklungen sind wohlbekannt für Systeme der statistischen Mechanik. Zum einen liefern sie - in Kombination mit Padé-Approximationen, recht genaue numerische Voraussagen, z.B. über Übergangstemperaturen des Ising-Modells, der $O(N)$ -Heisenberg-Modelle etc., siehe [Domb, Green, 1974]. Zum anderen läßt sich die Konvergenz der Hoch- bzw. Tieftemperaturentwicklung für viele Modelle streng beweisen, zumindest fernab der kritischen Temperatur. Es ergeben sich diverse rigorose Resultate, wie Existenz oder Abwesenheit einer spontanen Magnetisierung, exponentielles Clustern etc., siehe z.B. [Ruelle, 1969]. Die ersten Konvergenzresultate stammen von Groeneveld [1962] und beziehen sich auf die Mayer-Entwicklung für verdünnte Gase.

Gruber und Kunz [1971] haben gezeigt, daß sich eine relativ allgemeine Klasse von Gittersystemen auf gewisse Polymersysteme abbilden läßt, und haben diese dann mit Hilfe konvergenter Mayer-Entwicklungen analysiert. Insbesondere läßt sich damit die Hoch- und Tieftemperaturentwicklung z.B. des Ising-Modells von einem einheitlichen Standpunkt aus beschreiben.

Für die Gittereichtheorien wurden konvergente Clusterentwicklungen meines Wissens zum ersten Mal von Osterwalder und Seiler [1978], siehe auch [Osterwalder, 1976] verwendet. Gallavotti, Guerra und Miracle Solé haben dann betont, daß sich auch Gittereichtheorien auf die von Gruber und Kunz studierten Polymersysteme abbilden lassen [1977]. Eine sehr zu empfehlende Zusammenfassung der Clusterentwicklungsmethoden unter diesem Gesichtspunkt findet sich in [Seiler, 1982].

Der Vollständigkeit halber möchte ich diese Methoden hier noch einmal darstellen, auch um bei dieser Gelegenheit einige kleine Unstimmigkeiten auszubessern, die sich in die Darstellung von Seiler eingeschlichen

haben. Ich beanspruche hier keinerlei Originalität, sondern werde mich im Gegenteil eng an diese Darstellung anlehnen.

Es sei noch erwähnt, daß ich den Titel dieses Kapitels: "Die Clusterentwicklung für symmetrische Gitter" nur gewählt habe, um die hier zu besprechende Entwicklung von der Entwicklung im τ -Kontinuum zu unterscheiden. Es wird keineswegs nötig sein, die Gitterkonstanten ε und τ in Raum- bzw. Zeitrichtung gleichzusetzen. Der Konvergenzbereich wird allerdings von den gewählten Werten für ε und τ abhängen, und insbesondere wird die hier dargestellte Entwicklung für $\tau \rightarrow 0$ divergieren.

Der Aufbau dieses Kapitels ist wie folgt: im ersten Abschnitt werde ich die Gitter-Yang-Mills-Theorien gemäß Wilson definieren und diverse Confinementkriterien einführen (einige Ungleichungen, die diese Kriterien untereinander in Beziehung setzen, sind in Anhang A besprochen). Im zweiten Abschnitt behandle ich die übliche Clusterentwicklung für lokale Observablen und zeige insbesondere die Existenz eines Massengaps. Schließlich werde ich im Abschnitt 1.3 Confinement für unendlich schwere Quarks zeigen.

1.1 Gitter-Yang-Mills-Theorien, Confinementkriterien

Ich betrachte reine Gitter-Yang-Mills-Theorien (ohne Materiefelder) auf einem Gitter $\mathcal{L} = \tau \mathbb{Z} \times \varepsilon \mathbb{Z}^d$ bzw. endlichen Teilgittern $\Lambda = \tau \{-L_t, \dots, L_t\} \times \Lambda_0$. Hier bezeichnet $\Lambda_0 = \{x \in \varepsilon \mathbb{Z}^d : |x_i| \leq \varepsilon L\}$ ein endliches Raumgitter, ε bzw. τ sind die Gitterkonstanten in Raum- bzw. Zeitrichtung und $\nu = d+1$ ist die Raum-Zeit-Dimension. Unter dem thermodynamischen Limes $\Lambda \rightarrow \mathcal{L}$ versteht man den Limes $L, L_t \rightarrow \infty$.

Bei nichtverschwindender Temperatur $\beta^{-1} > 0$ ersetzt man $\mathcal{L}$ durch ein Gitter der Ausdehnung β in Zeitrichtung: $\mathcal{L}_\beta = \tau \{0, \dots, L_t\} \times \varepsilon \mathbb{Z}^d$ mit $\beta = \tau L_t$ und periodischen Randbedingungen in Zeitrichtung [Polyakov, 1978] Endliche Teilgitter sind von der Form $\Lambda = \tau \{0, \dots, L_t\} \times \Lambda_0$ wieder mit periodischen Randbedingungen in Zeitrichtung. Der thermodynamische Limes $\Lambda \rightarrow \mathcal{L}_\beta$ involviert nun nur den Limes $L \rightarrow \infty$, $\beta = \tau L_t$ bleibt fest.

Mit $\langle xy \rangle$ oder ℓ bezeichne ich orientierte nächste Nachbar- (n.N.) Paare (auch Links genannt) und mit p die (orientierten) elementaren Rechtecke aus vier Links $\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4$, auch Plaketten genannt. Man definiert $\partial p = \{\ell_1, \dots, \ell_4\}$ und $\partial \langle xy \rangle := \{x, y\}$ und schreibt $p = -p'$ oder $\ell = -\ell'$ falls p und p' oder ℓ und ℓ' sich nur in der Orientierung unterscheiden. Schließlich sei $\wedge^1$ resp. $\wedge^2$ die Menge der orientierten Links bzw. Plaketten in Λ , und $\wedge^{1+}$ resp. $\wedge^{2+}$ bezeichne die positiv orientierten Links resp. Plaketten in Λ . $\mathbb{L}^1, \mathbb{L}^2, \dots$ sind analog definiert.

Wie üblich ist ein Eichfeld g über Λ eine Abbildung $\langle xy \rangle \mapsto g_{xy}$ von $\wedge^{1+}$ in die Eichgruppe G , eine kompakte Gruppe mit normiertem Haarmaß dg . Falls $\langle yx \rangle$ positiv orientiert ist, definiert man $g_{yx} = g_{xy}^{-1}$. Lokale Observablen sind stetige Funktionen A von den Eichfeldern über $\mathbb{L}$ bzw. $\mathbb{L}_G$ in die komplexen Zahlen, die nur von endlich vielen "Link-Variablen" g_{xy} abhängen. Die entsprechende Menge n.N. Paare $\langle xy \rangle$ heißt etwas mißbräuchlich der Träger von A und wird mit $\text{supp}(A)$ bezeichnet. Falls $\text{supp}(A) \subset \wedge^{1+}$ ist, heißt A Observable über Λ .

Jeder geschlossenen Schleife C ordnet man eine Konjugationsklasse $[g_C]$ zu: $g_C = \prod_{\langle xy \rangle \in C} g_{xy}$, wobei das Produkt längs C geordnet ist. Weiter ordnet man den Plaketten $p \in \wedge^2$ die "Plaketten-Variable" $[g_p]$ zu. Ich unterscheide häufig nicht zwischen $[g_C]$ und g_C , statt $g_{\partial p}$ schreibe ich meist g_p .

Man definiert nun die Wirkung S_Λ [Wilson, 1974] durch

$$S_\Lambda = \sum_{p \in \wedge^{2+}} S_p \quad S_p = -J_p \text{Re} \chi(g_p) \quad (1.1)$$

wobei $J_p = J_m := (\tau/\epsilon) 2\epsilon^{d-3}/g^2$ ist, falls p nur räumliche Links enthält bzw. $J_p = J_e := (\epsilon/\tau) 2\epsilon^{d-3}/g^2$, falls p auch Links in Zeitrichtung enthält. $\chi(\cdot)$ bezeichnet die Spur in einer treuen Darstellung von G , und g^2 ist die nackte Kopplungskonstante.

Erwartungswerte im Volumen Λ sind durch

$$\langle A \rangle_\Lambda := \frac{1}{Z_\Lambda} \int A e^{-S_\Lambda} dg_\Lambda \quad (1.2)$$

gegeben¹, wobei dg_Λ das Produkthaarmaß $dg_\Lambda = \prod_{\ell \in \Lambda^{1+}} dg_\ell$ ist und z_Λ so gewählt wird, daß $\langle 1 \rangle_\Lambda = 1$ ist.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß sowohl S_Λ als auch das Haarmaß dg_Λ invariant unter den Eichtransformationen

$$g_{xy} \rightarrow h_x^{-1} g_{xy} h_y$$

ist. Damit folgt klarerweise auch die Invarianz von $\langle \cdot \rangle_\Lambda$ unter Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\Lambda &= \langle A^h \rangle_\Lambda \\ A^h(\{g_{xy}\}) &= A(\{h_x^{-1} g_{xy} h_y\}) \end{aligned}$$

Man spricht von einer Eichtransformation am Punkt x_0 , wenn h_x nur für $x = x_0$ von $\mathbb{1}$ verschieden ist.

Für den Rest dieses Abschnitts will ich die Existenz des thermodynamischen Limes $\Lambda \rightarrow \mathbb{L}$ resp. $\Lambda \rightarrow \mathbb{L}_\beta$ annehmen und die resultierenden Erwartungswerte im unendlichen Volumen mit $\langle \cdot \rangle$ bzw. $\langle \cdot \rangle_\beta$ bezeichnen

$$\langle A \rangle = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{L}} \langle A \rangle_\Lambda \quad (1.3)$$

$$\langle A \rangle_\beta = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{L}_\beta} \langle A \rangle_\Lambda \quad (1.4)$$

¹Mit dieser Definition haben wir implizit "freie Randbedingungen" bzw. "freie Randbedingungen in Raumrichtung" gewählt; d.h. wir integrieren über die Eichfelder auf dem Rand von Λ mit dem "freien" Haarmaß dg_{xy} , statt sie beispielsweise auf einen festen Wert einzufrieren.

Desweiteren sei hier angenommen, daß $\langle \cdot \rangle$ bzw. $\langle \cdot \rangle_\beta$ translationsinvariant sind und die sogenannte Reflexionspositivität (zur Def. dieses Begriffes siehe z.B. [Seiler, 1982]) erfüllen.

Zur Diskussion des Confinementproblems betrachtet man nun die sogenannten Wilson-Loop bzw. die Polyakov-Loop Observable. Die Wilson-Loop Observable $W_q(C)$ ist durch

$$W_q(C) := \chi_q(g_C) / \chi_q(1) \quad (1.5)$$

definiert, wobei $\chi_q(\cdot)$ die Spur in der irreduziblen Darstellung q der Eichgruppe G bezeichnet. Bei nicht verschwindender Temperatur betrachtet man statt $W_q(C)$ die Polyakov-Loop Observable

$$P_q(x) := \chi_q(g_{C(x)}) / \chi_q(1) \quad (1.6)$$

wobei $C(x)$ die Gerade in Zeitrichtung ist, die den Punkt $(0, x)$ schneidet. $C(x)$ ist mittels der periodischen Randbedingungen in Zeitrichtung geschlossen. Häufig spricht man auch kurz vom Wilson-Loop $W_q(C)$ bzw. vom Polyakov-Loop $L_q(x)$.

Es sei Σ die Ebene

$$\Sigma = \{ (x_0, x) \in \mathbb{L} : x_i = 0 \text{ für } i \geq 2 \}$$

und $C_{t\ell}$ ein geschlossener Weg in Σ mit Ausdehnung t in Zeitrichtung und Ausdehnung ℓ in l -Richtung. Das Wilson-Potential zwischen zwei (unendlich schweren) Quarks q resp. $\bar{q}$ im Abstand ℓ ist dann definiert als

$$V_{q\bar{q}}^{(W)}(\ell) := -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle \quad (1.7)$$

Zur Interpretation siehe z.B. [Seiler, 1982].

Bei nicht verschwindender Temperatur macht die Definition (1.7) klarerweise keinen Sinn. Statt dessen betrachtet man die Differenz der freien

Energien des Systems mit und ohne unendlich schwere Quarks. Für diese Differenz, die ich mit $F_{q\bar{q}}^\beta$ bezeichne, erhält man ([Polyakov, 1978], [Borgs, Seiler, 1983])

$$F_{q\bar{q}}^\beta(\ell) = -\frac{1}{\beta} \log \left[d_q^4 \langle \overline{L_q(x)} L_q(y) \rangle_\beta \right] \quad (1.8)$$

mit $d_q = \chi_q(\mathbb{Z})$ und $y = x + \ell \hat{e}_1$, $\hat{e}_1$ ist der Einheitsvektor in 1-Richtung.

Im Limes $\beta \rightarrow \infty$ ergibt sich eine etwas andere Definition des $q\bar{q}$ Potentials, nämlich

$$V_{q\bar{q}}^{(P)}(\ell) = \liminf_{\beta \rightarrow \infty} F_{q\bar{q}}^\beta(\ell) \quad (1.9)$$

Man spricht von linearem Confinement oder permanent gebundenen Quarks, wenn sich $F_{q\bar{q}}^-$ bzw. $V_{q\bar{q}}^-$ für $\ell \rightarrow \infty$ asymptotisch wie $\sigma_q \ell$ mit einer Konstanten $\sigma_q > 0$ verhalten, und von Deconfinement oder freien Quarks, wenn $F_{q\bar{q}}^-$ resp. $V_{q\bar{q}}^-$ für $\ell \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben. Insbesondere ergibt sich lineares Confinement im Sinne von Wilson, wenn $\langle W_q(C_\ell) \rangle$ für große Wilson-Loops C_ℓ exponentiell mit der Fläche $t \cdot \ell$ abfällt ("Area Law"), und, bei endlichem $\beta < \infty$, Confinement im Sinne von Polyakov, wenn die "Zweipunktfunktion" $\langle \overline{L_q(x)} L_q(y) \rangle_\beta$ exponentiell mit dem Abstand $|x-y|$ abfällt.

Die Konstante σ_q heißt Saitenspannung oder Stringtension

$$\sigma_q^{(W)} := \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} V_{q\bar{q}}^{(W)}(\ell) \quad (1.10)$$

$$\sigma_{q,\beta}^{(P)} := \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} F_{q\bar{q}}^\beta(\ell) \quad (1.11)$$

Bei Temperatur $\beta^{-1} = 0$ sind neben $\sigma_q^{(W)}$ auch

$$\sigma_q^{(P)} := \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} V_{q\bar{q}}^{(P)}(\ell) \quad (1.12)$$

und

$$\tilde{\sigma}_q^{(P)} := \liminf_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_{q,\beta}^{(P)} \quad (1.13)$$

Kandidaten für die Saitenspannung. Obwohl i.A. nur bewiesen ist, daß $\sigma_{q(W)}^{(W)} \geq \sigma_{q(P)}^{(P)} \geq \tilde{\sigma}_q^{(P)}$ ist (siehe Anhang A), nimmt man allgemein an, daß $\sigma_{q(W)}^{(W)} = \sigma_{q(P)}^{(P)} = \tilde{\sigma}_q^{(P)}$ ist. Für große g^2 läßt sich diese Gleichheit auch zeigen, siehe Abschnitt 2.6.

Bemerkungen:

- i) Eine etwas andere Definition der Saitenspannung, die hier nicht besprochen wurde, geht auf t'Hooft [1979] zurück. Es sollte gelten $\sigma_{q,\beta}^{t'Hooft} = \sigma_{q,\beta}^{(P)}$, aber gezeigt ist wieder nur eine Ungleichung, nämlich $\sigma_{q,\beta}^{t'Hooft} \leq \sigma_{q,\beta}^{(P)}$ ([Borgs, Seiler, 1983], siehe auch [Iomboulis, Yaffe, 1985]).
- ii) Für große g^2 ist die Existenz und Translationsinvarianz der Grenzwerte (1.3) und (1.4) ein Standardresultat. Sie folgt aus der Konvergenz der im nächsten Abschnitt noch einmal dargestellten Clusterentwicklung. Für allgemeine g^2 ist die Konvergenz zumindest für geeignete Teilfolgen gegeben, wie ein einfaches Kompaktheitsargument zeigt. Siehe z.B. [Dobrushin, 1968].
- iii) Die Existenz der Grenzwerte (1.7), (1.10)-(1.12) folgt aus den Konvexitätseigenschaften von $\log \langle W_q \rangle$, F_{qq} und V_{qq} . Siehe z.B. [Seiler, 1978], [Borgs, Seiler 1983] oder [Iomboulis, Yaffe, 1985].
- iv) Bei nichtverschwindender Temperatur $\beta^{-1} > 0$ kann das Abfallverhalten großer Wilson-Loops nicht als Confinement-Kriterium herangezogen werden. Insbesondere können raumartige Wilson-Loops auch in der Deconfinement-Phase exponentiell mit der eingespannten Fläche abfallen ([Borgs, 1985], siehe auch [Svetitsky, Yaffe, 1982]).

1.2 Die Clusterentwicklung für lokale Observable

Um die Idee der Clusterentwicklung für große g^2 zu erläutern, betrachte ich zunächst die Zustandssumme

$$Z_\Lambda = \int dq_\Lambda \prod_{p \in \Lambda^{2+}} e^{-S_p}$$

Für große g^2 ist S_p klein und es erscheint berechtigt, den Gibbs Faktor nach $g_p = e^{-S_p-1}$ zu entwickeln. Man erhält

$$\begin{aligned} Z_\Lambda &= \int dq_\Lambda \prod_{p \in \Lambda^{2+}} (1 + g_p) \\ &= \sum_{\Gamma \subset \Lambda^{2+}} \int dq_\Lambda \prod_{p \in \Gamma} g_p \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es, Z_Λ als Zustandssumme eines geeigneten Polymersystems zu schreiben. Die Mayer-Entwicklung für dieses Polymersystem liefert dann den Logarithmus $\log Z_\Lambda$ ([Gruber, Kunz, 1971], siehe auch Anhang B).

Wir benötigen die folgende Notation: zwei Link ℓ, ℓ' hängen zusammen, wenn $\partial\ell \cap \partial\ell'$ nicht leer ist; ein Link ℓ und eine Plakette p hängen zusammen, wenn $\ell \in \partial p$ oder $-\ell \in \partial p$ ist; zwei Plaketten hängen zusammen, wenn es ein Link gibt, das mit beiden zusammenhängt; eine Menge M von Links und Plaketten hängt mit einer Menge N von Links und Plaketten zusammen, wenn es ein $m \in M$ und ein $n \in N$ gibt, die zusammenhängen.

In der obigen Darstellung für Z_Λ faktorisiert das Integral über dg_Λ nun immer dann, wenn $\Gamma \subset \Lambda^{2+}$ in Zusammenhangskomponenten $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ zerfällt:

$$\int dq_\Lambda \prod_{p \in \Gamma} g_p = \prod_{i=1}^n \int dq_{\gamma_i} \prod_{p \in \gamma_i} g_p$$

Wir definieren: Ein Polymer ist eine endliche, nicht leere, zusammenhängende Menge γ von Plaketten. Zwei Polymere γ, γ' heißen kompatibel, wenn γ nicht mit γ' zusammenhängt. Wir schreiben $\gamma \sim \gamma'$ für kompatible und $\gamma \not\sim \gamma'$ für inkompatible Polymere.

Schließlich ist für $\gamma \in \Lambda^{2+}$ die Aktivität $z_\Lambda(\gamma)$ durch

$$z_\Lambda(\gamma) = \int dg_\Lambda \prod_{\mu \in \gamma} g_\mu$$

definiert. Für $\gamma \notin \Lambda^{2+}$ ist $z_\Lambda(\gamma) = 0$.

Mit diesen Definitionen schreibt sich Z_Λ als Zustandssumme eines Polymersystems:

$$Z_\Lambda = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}} \prod_{i=1}^n z_\Lambda(\gamma_i) \quad (1.15)$$

wobei die Summe $\sum^c$ über Mengen von paarweise kompatiblen Polymeren geht. Für $\log Z_\Lambda$ erhält man (siehe Anhang B):

$$\log Z_\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_\Lambda(\gamma_i) \quad (1.16)$$

mit einem kombinatorischen Koeffizienten ϕ_c , der wie folgt definiert ist: Es sei $G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ der Graph mit Vertices $1, \dots, n$ und einer Linie zwischen i und j , wenn immer $i \neq j$ und $\gamma_i \neq \gamma_j$ ist. Für $n \geq 2$ ist dann

$$\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{C \subset G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} (-1)^{\ell(C)}$$

wobei die Summe über alle zusammenhängenden Graphen C über $1, \dots, n$ geht, die in G enthalten sind. $\ell(C)$ ist die Zahl der Linien in C . Für $n = 1$ definiert man $\phi_c(\gamma) = 1$.

Bemerkungen:

i) Aufgrund der obigen Definition ist ϕ_c nur dann von Null verschieden, wenn der Graph $G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ zusammenhängt, d.h. wenn $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ eine zusammenhängende Menge ist. (1.16) ist also eine Entwicklung in zusammenhängende "Cluster" von Polymeren. Daher der Name "Clusterentwicklung".

ii) (1.16) ist zunächst nur eine Identität im Sinne formaler Potenzreihen. Deshalb ist (1.16) selbst für endliche Λ nicht notwendigerweise konvergent. Für hinreichend große g^2 (bei festgehaltenen Gitterkonstanten $\varepsilon, \tau > 0$) läßt sich jedoch die absolute Konvergenz der Entwicklung (1.16) zeigen, siehe Anhang C.

Die Erwartungswerte von Observablen über Λ ergeben sich aus der folgenden, modifizierten Zustandssumme

$$Z_{\Lambda}(A) = \langle 1 + A \rangle_{\Lambda} Z_{\Lambda}$$

durch Differenzieren des Logarithmus

$$\langle A \rangle_{\Lambda} = \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \log Z_{\Lambda}(\alpha A) \quad (1.17)$$

Wir entwickeln wieder den Gibbs-Faktor $e^{-S_{\Lambda}}$ und erhalten diesmal

$$Z_{\Lambda}(A) = \sum_{n=0,1} \sum_{\Gamma \subset \Lambda^{2+}} \int A^n \prod_{p \in \Gamma} g_p \, dg_{\Lambda}$$

Klarerweise müssen wir die Definition eines Polymers γ ändern, da bisher faktorisierende Beiträge nun über A gekoppelt sein können. Außerdem müssen wir kennzeichnen, ob für ein gegebenes Polymer $n=0$ oder $n=1$ gilt.

Wir definieren: ein Polymer γ ist ein geordnetes Paar $\gamma = (\tilde{\gamma}, n)$, bestehend aus einer endlichen Menge $\tilde{\gamma}$ von Plaketten und einer Zahl $n \in \{0, 1\}$, so daß entweder gilt

- i) $n=0$, $\tilde{\gamma}$ ist zusammenhängend und nicht leer, oder
- ii) $n=1$, alle Zusammenhangskomponenten von $\tilde{\gamma}$ hängen mit $\text{supp}(A)$ zusammen.

Wir nennen die Polymere γ mit $n(\gamma) = 0$ gewöhnliche Polymere und diejenigen mit $n(\gamma) = 1$ A-Polymere. Statt $p \in \tilde{\gamma}$ schreibt man häufig $p \in \gamma$, statt $|\tilde{\gamma}|$ schreibt man $|\gamma|$ für die Zahl der Plaketten in $\tilde{\gamma}$. Wir definieren das erweiterte Polymer $\bar{\gamma}$ als $\text{supp}(A) \cup \tilde{\gamma}$ falls $n(\gamma) = 1$ und als $\tilde{\gamma}$ falls $n(\gamma) = 0$. Zwei Polymere γ, γ' heißen inkompatibel (schreib $\gamma \not\sim \gamma'$), wenn $\bar{\gamma}$ mit $\bar{\gamma}'$ zusammenhängt. Insbesondere sind zwei

A-Polymere stets inkompatibel.

Wir definieren schließlich für $\tilde{\gamma} \in \Lambda^{2+}$

$$z_{A,\Lambda}(\gamma) = \int A^{n(\gamma)} \prod_{p \in \gamma} g_p dg_\Lambda \quad (1.18)$$

und für $\tilde{\gamma} \notin \Lambda^{2+}$ $z_{A,\Lambda}(\gamma) = 0$. Mit diesen Definitionen schreibt sich $Z_\Lambda(A)$ als Zustandssumme eines Polymersystems

$$Z_\Lambda(A) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}^c \prod_{i=1}^n z_{A,\Lambda}(\gamma_i) \quad (1.19)$$

und vermittelt der Mayer-Entwicklung für Polymersysteme

$$\log Z_\Lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_{A,\Lambda}(\gamma_i)$$

Nach Skalieren mit α und Differenzieren gemäß (1.17) erhalten wir schließlich die gewünschte Clusterentwicklung für $\langle A \rangle_\Lambda$

$$\langle A \rangle_\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}^{\prime} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_{A,\Lambda}(\gamma_i) \quad (1.20)$$

wobei die Summe $\sum^{\prime}$ über Terme linear in A geht. Jeder Term in (1.20) enthält also genau ein A-Polymer und n-1 gewöhnliche Polymere.

Die Konvergenz der Clusterentwicklung (1.20) für große g^2 beruht auf dem folgenden, in Anhang C bewiesenes,

Lemma 1.1:

Es sei $\nu = d+1$ die Raumzeitdimension, $N_A = |\text{supp}(A)|$ und es gelte

$$|z_{A,\Lambda}(\gamma)| \leq \|A\|^{n(\gamma)} e^{-b|\gamma|}$$

mit einer von γ unabhängigen Konstanten b. Dann gibt es eine nur von ν abhängige Konstante b_0 , so daß für $b > b_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{|\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)|}{n!} \prod_{i=1}^n |z_{A, \wedge}(\gamma_i)| \leq \\ \leq \|A\| (2e)^{N_A} \text{ const}$$

ist. Die Konstante const hängt nur von $b-b_0$ ab und fällt mit größer werdendem b .

Bemerkung:

iii) Es sei $\|\cdot\|$ die Supremums-Norm und $r = \sup_p \|S_p\|$. Dann ist

$$\|g_n\| \leq e^r - 1 \text{ und somit}$$

$$|z_{A, \wedge}(\gamma)| \leq \|A\|^{n(\gamma)} (e^r - 1)^{|\gamma|}$$

Also ist die Clusterentwicklung für $r < K_1 = \log(1+e^{b_0})$, und damit für hinreichend große g^2 , absolut konvergent.

Korollar 1.2:

Es seien $|J_m|, |J_e| < K_1/\chi(1)$. Dann existieren für lokale Observablen A die Grenzwerte

$$\langle A \rangle = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{L}} \langle A \rangle$$

$$\langle A \rangle_0 = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{L}_\beta} \langle A \rangle$$

Sie sind translationsinvariant und als Funktionen von J_m und J_e analytisch im Gebiet

$$\mathcal{G} = \{(J_m, J_e) : |J_m|, |J_e| < K_1/\chi(1)\}$$

Beweis:

Für $|J_m|, |J_e| < K_1/\chi(1)$ ist $r = \sup_p \|S_p\| < K_1$, d.h. wir können Lemma 1.1 anwenden. Der thermodynamische limit $\Lambda \rightarrow \mathbb{L}$ bzw. $\Lambda \rightarrow \mathbb{L}_\beta$ in (1.20) kann

dann Term für Term durchgeführt werden. Man erhält

$$\langle A \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_A(\gamma_i) \quad (1.21)$$

mit

$$z_A(\gamma) = \int A^{n(\gamma)} \prod_{p \in \gamma} s_p dq_p$$

Die Translationsinvarianz der rechten Seite von (1.21) ist evident, da die Kopplungskonstanten J_p translationsinvariant gewählt wurden. Die Analytizität in J_m und J_e folgt aus der Analytizität der einzelnen Terme und der Tatsache, daß (1.21) absolut und gleichmäßig in jedem kompakten Teilgebiet von $\mathcal{G}$ konvergiert. Der Beweis für $\langle A \rangle_0$ ist derselbe. ■

Bemerkung

iv) Die gleichmäßige Konvergenz der Clusterentwicklung (1.20) erlaubt es ferner zu zeigen, daß der thermodynamische Limes unabhängig von Randbedingungen ist, oder genauer: daß es nur einen DLR-Zustand ([Dobrushin, 1968] und [Lanford, Ruelle, 1969]) zur Wilson Wirkung S gibt. Da der Beweis die DLR-Gleichungen benutzt, die ich an dieser Stelle nicht einführen möchte, aber abgesehen davon keine weiteren Probleme bereitet, sei er hier unterschlagen.

Satz 1.3:

Es seien A, B lokale Observablen und $d(A, B)$ sei der Abstand der Träger von A und B . Dann existieren für $|J_m|, |J_e| < K_1/\chi(1)$ Konstanten $M > 0$, $K_{AB} < \infty$, so daß

$$|\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle| \leq K_{AB} e^{-M d(A, B)} \quad (1.22)$$

ist. M ist unabhängig von A, B und K_{AB} ist invariant unter Translationen von A oder B . Dieselbe Ungleichung gilt für $\langle \cdot \rangle_0$.

Bemerkung:

v) Das "exponentielle Clustern" gemäß (1.22) ist für $\beta^{-1} = 0$ äquivalent zur Existenz eines Massengaps.

Beweis von Satz 1.3:

Wir leiten zunächst eine Clusterentwicklung für die trunkierten Erwartungswerte $\langle A; B \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ her. Wir betrachten wieder eine modifizierte Zustandssumme

$$\langle A; B \rangle_{\Lambda} = \frac{d^2}{d\alpha d\beta} \Big|_{\alpha=\beta=0} \log Z_{\Lambda}(\alpha A, \beta B) \quad (1.23)$$

$$Z_{\Lambda}(A, B) = Z_{\Lambda} \langle (1+A)(1+B) \rangle_{\Lambda}$$

und verfahren wie gehabt:

$$Z_{\Lambda}(A, B) = \sum_{n_A, n_B \in \sigma} \frac{1}{|\Lambda|^2} \int A^{n_A} B^{n_B} \prod_{p \in \Lambda} g_p dg_{\Lambda}$$

Polymere $\gamma = (\tilde{\gamma}, n_A, n_B)$ bestehen nun aus einer Menge $\tilde{\gamma}$ von Plaketten und zwei Zahlen $n_A, n_B \in \{0, 1\}$. Neben den schon definierten gewöhnlichen Polymeren ($n_A = n_B = 0$) und den A- bzw. B-Polymeren ($n_A = 1, n_B = 0$) bzw. ($n_B = 1, n_A = 0$) führt man nun noch AB-Polymere ein: $(\tilde{\gamma}, n_A, n_B)$ heißt AB-Polymer, wenn

- i) $n_A = n_B = 1$ ist,
- ii) alle Zusammenhangskomponenten von $\tilde{\gamma}$ mit $\text{supp}(A)$ oder $\text{supp}(B)$ zusammenhängen und
- iii) mindestens eine Zusammenhangskomponente von $\tilde{\gamma}$ sowohl mit $\text{supp}(A)$ als auch $\text{supp}(B)$ zusammenhängt.

Für ein AB-Polymer γ ist $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma} \cup \text{supp}(A) \cup \text{supp}(B)$, und zwei beliebige Polymere γ, γ' heißen inkompatibel, wenn $\bar{\gamma}$ mit $\bar{\gamma}'$ zusammenhängt. Die Aktivität $z_{AB, \Lambda}(\gamma)$ wird

$$z_{AB, \Lambda}(\gamma) = \int A^{n_A}(\gamma) B^{n_B}(\gamma) \prod_{p \in \gamma} g_p dg_{\Lambda}$$

falls $\tilde{\gamma} \in \Lambda^{2+}$ und Null falls $\tilde{\gamma} \notin \Lambda^{2+}$ ist.

Damit haben wir $Z_{\Lambda}(A, B)$ als Zustandssumme eines Polymersystems dargestellt

$$Z_{\Lambda}(A, B) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}} \prod_{i=1}^n z_{AB}(\gamma_i)$$

und erhalten

$$\ln Z_{\Lambda}(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_{AB, \Lambda}(\gamma_i)$$

bzw. nach Differentiation gemäß (1.23)

$$\langle A, B \rangle_{\Lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}' \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_{AB, \Lambda}(\gamma_i) \quad (1.24)$$

wobei die Summe $\sum'$ über Terme linear in A und B geht.

Ohne Einschränkung sei nun sowohl $\text{supp}(A)$ als auch $\text{supp}(B)$ zusammenhängend (gegebenenfalls vergrößere man sie entsprechend). Damit ist $\tilde{\gamma}$ für ein beliebiges Polymer γ zusammenhängend. Aufgrund der Definition von ϕ_c folgt dann, daß $\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ nur dann von Null verschieden ist, wenn

$$\bigcup_{i=1}^n \overline{\gamma_i}$$

zusammenhängend ist. Da andererseits (1.24) nur über Terme linear in A und B geht, muß dann stets $\sum |\gamma_i| \geq d(A, B)$ sein. Somit gilt für alle $M > 0$

$$|\langle A, B \rangle_{\Lambda}| \leq e^{-M d(A, B)} \times \quad (1.25)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}' \left| \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n \tilde{z}_{AB, \Lambda}(\gamma_i) \right|$$

mit $\tilde{z}_{AB}(\gamma) = z_{AB}(\gamma) e^{M|\gamma|}$.

Klarerweise ist

$$|\tilde{z}_{AB}(\gamma)| \leq \|A\|^{n_A(\gamma)} \|B\|^{n_B(\gamma)} e^{-b'|\gamma|}$$

mit $b' = b - M$, $e^{-b} = e^r - 1$. Für $r < K_1$ ist $b > b_0$ und wir können M stets so wählen, daß auch $b' > b_0$ ist. Ebenso wie die absolute Konvergenz von (1.20) zeigt man aber für $b' > b_0$ die Beschränktheit des zweiten Faktors auf der rechten Seite von (1.25). Die resultierende Schranke K_{AB} hängt nur von $\|A\|$, $\|B\|$, N_A und N_B sowie $b' - b_0$ ab und ist insbesondere invariant unter Translationen von A oder B . ■

1.3 Confinement für ∞ -schwere Quarks

In diesem Abschnitt wollen wir Confinement für ∞ schwere Quarks zeigen. Die benötigten Schranken an die Zweipunktfunktion $\langle L_q(x) L_q(y) \rangle_B$ und den Wilson Loop $\langle W_q(C) \rangle$ werden aus der Clusterentwicklung (1.20), kombiniert mit Aussagen über die minimale Größe der auftretenden Polymere folgen. Für den Wilson Loop ist dies in der Literatur vielfach ausgeführt (der erste Beweis stammt von Osterwaler und Seiler [1978]). Da ich jedoch an mehreren Stellen auf den Beweis Bezug nehmen werde, sei er hier noch einmal vorgeführt.

Es wird sich zeigen, daß man von einem bestimmten Punkt an voraussetzen muß, daß das Zentrum $Z(G)$ durch q nicht trivial dargestellt ist; zunächst werde ich jedoch einige Aussagen beweisen, die unabhängig von der verwendeten Darstellung q sind (Lemma 1.4).

Ich benötige einige Definitionen. Statt von $W_q(C)$ -Polymeren will ich von C -Polymeren sprechen, statt $z_{W_q(C)}$ schreibe ich $z_{q,C}$ oder manchmal auch nur z_C . Ich werde häufig nicht mehr zwischen dem C -Polymer (definiert als geordnetes Paar $(\tilde{\gamma}, n)$) und der entsprechenden Menge $\tilde{\gamma}$ von Plaketten unterscheiden. C sei stets ein geschlossener, doppelpunktfreier Weg. Ein link $\ell \in \mathbb{L}^1$, das mit genau einer Plakette in $\tilde{\gamma}$ zusammenhängt, heißt isolierter Randlink von $\tilde{\gamma}$, wenn weder ℓ noch $-\ell$ in C liegt. Es wird sich manchmal als praktisch erweisen, die Wirkung so zu normieren, daß

$$\int e^{-S_p(q)} dq = 1 \quad (1.26)$$

ist. Es gilt nun

Lemma 1.4:

Es sei q verschieden von der trivialen Darstellung und S_p sei gemäß (1.26) normiert. Dann gilt für C-Polymere γ mit nicht verschwindender Aktivität

- i) γ besitzt keine isolierten Randlinks
- ii) Jedes Link $\ell \in C$ hängt mit mindestens einer Plakette $p \in \gamma$ zusammen.
- iii) γ ist eine zusammenhängende Menge.

Die letzten beiden Punkte gelten unabhängig von der Normierung (1.26).

Beweis:

- i) Es sei ℓ isoliertes Randlink von γ , p_0 sei die Plakette in γ , die mit ℓ zusammenhängt. Dann gilt

$$Z_{q,C}(\gamma) = \int \prod_{\ell' \neq \ell} dq_{\ell'} W_q(C) \prod_{p \in \gamma \setminus \{p_0\}} S_p \int dq_{\ell} S_{p_0}$$

Aufgrund der Normierungsbedingung (1.26) und der Invarianzeigenschaften des Haarmaßes ist aber

$$\int dq_{\ell} S_{p_0}(q_{p_0}) = \int dq_{\ell} S_{p_0}(q_{\ell}) = 0$$

- ii) Es sei $\ell \in C$ ein Link, daß nicht mit γ zusammenhängt. Dann ist

$$Z_{q,C}(\gamma) = \int \prod_{\ell' \neq \ell} dq_{\ell'} \prod_{p \in \gamma} S_p \int dq_{\ell} \chi_q(q_C) / \chi_q(1)$$

da keine der Plaketten $p \in \gamma$ das Link ℓ enthält. Das Integral über q_{ℓ} verschwindet aber aufgrund des Peter-Weyl-Theorems ([Hewitt, Ross 1970], siehe auch Anhang D).

iii) Es sei $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ mit nicht leeren Mengen γ_1, γ_2 , die nicht miteinander zusammenhängen. Wir müssen zeigen, daß dann $z_{q,C}(\gamma) = 0$ ist. Es sei L_1 bzw. L_2 die Menge der Links in C , die mit γ_1 bzw. γ_2 zusammenhängen. Man beachte, daß aufgrund von ii) $L_1 \cup L_2 = C$ ist. Es sei weiter $\partial L_1 = \partial L_2$ die Menge von Punkten x , die nur zu einem Link in L_1 resp. L_2 gehören. $z_{q,C}(\gamma)$ schreibt sich nun als eine Summe von Termen der Form

$$d_q^{-1} \int dq_L \prod_{p \in \gamma} \rho_p \prod_{\langle xy \rangle \in C} U_q^{a_x a_y}(q_{xy})$$

Wir führen für alle Links $\langle xy \rangle$, die mit γ_1 zusammenhängen, die Variablen-Transformation $q_{xy} \rightarrow h_x q_{xy} h_y^{-1}$ durch. Dies läßt die Plaketten-Variablen q_p für $p \in \gamma_2$ unverändert (γ_1 und γ_2 hängen nicht miteinander zusammen) und bewirkt für $p \in \gamma_1$ nur irrelevante Konjugationen. ρ_p bleibt also für alle $p \in \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ unverändert. Man erhält, nach Integration über h

$$\begin{aligned} & \int dq_L \prod_{p \in \gamma} \rho_p \prod_{\langle xy \rangle \in C} U_q^{a_x a_y}(q_{xy}) = \\ &= \sum_{\{\tilde{a}_x\}_{x \in \partial L_1}} \prod_{x \in \partial L_1} \int U_q^{\tilde{a}_x a_x}(h_x) dh_x \\ & \times \int dq_L \prod_{p \in \gamma} \rho_p \prod_{\langle xy \rangle \in C} U_q^{\tilde{a}_x \tilde{a}_y}(q_{xy}) \end{aligned}$$

mit $\tilde{a}_x = a_x$ falls $x \notin \partial L_1$. Die h -Integrale verschwinden jedoch aufgrund des Peter-Weyl-Theorems. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Ich benötige weitere Definitionen. Es sei C^+ die Menge der Links $\ell \in \mathbb{L}^+$, so daß ℓ oder $-\ell$ in C liegt. Γ sei die duale Gruppe zum Zentrum $Z(G)$. Ich will Γ als additive Gruppe schreiben. Eine 2-Form ist wie üblich eine Funktion $f: \mathbb{L}^{2+} \rightarrow \Gamma$ mit endlichem Träger. Für $-p \in \mathbb{L}^{2+}$ definiert man $f(p) = -f(-p)$, aber den Träger $\text{supp}(f)$ will ich hier stets als die

Menge der positiv orientierten Plaketten p definieren, für die $f(p) \neq 0$ ist. Schließlich ist d^*f durch $(d^*f)(\mathcal{L}) = \sum_{p \in \mathcal{L} \cap \partial \mathcal{P}} f(p)$ definiert. Ich nenne f eine in C eingespannte Γ -Fläche, wenn C^+ der Träger von d^*f ist. Ich sage: f trägt Ladung $q' \in \mathbb{R}$, wenn für $\mathcal{L} \in C$ $(d^*f)(\mathcal{L}) = -q'$ ist. Die Zahl der Plaketten in $\text{supp}(f)$ nenne ich die Größe von f , und $A(C)$ definiere ich als die Größe der minimalen, in C eingespannten Γ -Fläche. Schließlich sage ich: f lebt auf $\gamma \subset \mathbb{U}^{2+}$, wenn $\text{supp}(f) \subset \gamma$ ist.

Lemma 1.5 [Seiler, 1982]

Es sei q eine Darstellung, die das Zentrum $Z(G)$ nicht trivial darstellt. q' sei die entsprechende irreduzible Darstellung von $Z(G)$. Und γ sei ein C -Polymer mit nicht verschwindender Aktivität.

Dann gilt:

- i) Es gibt eine in C eingespannte Γ -Fläche, die auf γ lebt und Ladung q' trägt.
- ii) $|\gamma| \geq A(C)$

Beweis:

i) Wir benutzen die Identität

$$\int_G dq F(q) = \int_G dq \int_{Z(G)} d\omega F(\omega q)$$

Es folgt, daß $z_{q,C}(\gamma)$ immer dann Null ist, wenn

$$\prod_{p \in \gamma} \rho_p(q_p \omega_p) \chi_q(\omega_c) d\omega_L$$

verschwindet. Wir zerlegen nun

$$R(\omega) = \prod_{p \in \gamma} \rho_p(q_p \omega_p) ,$$

aufgefaßt als Funktion auf $Z(G)^{|\gamma|}$, in seine Fourierkomponenten und erhalten eine Linearkombination von Termen der Form

$$\int \prod_{p \in \gamma} \chi_{\tilde{q}(p)}(\omega_p) \prod_{\ell \in C} \chi_{q'}(\omega_\ell) d\omega_\ell \quad (1.27)$$

die nur dann von Null verschieden sind, wenn sich die Darstellungen an jedem Link ℓ zu Null kombinieren. Wir benutzen nun die Identität (Stokes'scher Satz)

$$\prod_{p \in \gamma} \chi_{\tilde{q}(p)}(\omega_p) = \prod_{\ell} \prod_{p: \ell \in \partial p} \chi_{\tilde{q}(p)}(\omega_\ell)$$

um zu schließen (man beachte, daß $\chi_{q_1}(\omega) \chi_{q_2}(\omega) = \chi_{q_1+q_2}(\omega)$ ist), daß (1.27) nur dann von Null verschieden ist, wenn

$$(d^* \tilde{q})(\ell) = \sum_{p: \ell \in \partial p} \tilde{q}(p) = \begin{cases} \pm q' & \text{für } \ell \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Es folgt, daß $z_{q,C}(\gamma) = 0$ ist, wenn es keine in C eingespannte Γ -Fläche $\tilde{q}$ gibt, die auf γ lebt und Ladung q' trägt.

ii) folgt sofort aus i). ■

Satz 1.6:

Es sei q eine Darstellung, die das Zentrum $Z(G)$ nicht trivial darstellt. Dann gilt für $|J_m|, |J_e| < K_1/\chi(1)$ das "Area Law"

$$|\langle W_q(C) \rangle| \leq \text{const } e^{-\alpha A(C)} \quad (1.28)$$

mit Konstanten $\alpha > 0$, $\text{const} < \infty$, die nicht von C abhängen.

Beweis:

Wir zeigen hier nur die etwas schwächere Ungleichung

$$|\langle W_q(C) \rangle| \leq \text{const } (2e)^{|C|} e^{-\alpha A(C)} \quad (1.29)$$

und verweisen bezüglich (1.28) auf den Anhang C. Zunächst einmal gilt mittels (1.20) und Lemma 1.1

$$| \langle W_q(C) \rangle | \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum'_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \left| \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_{q,c}(\gamma_i) \right|$$

$$\leq (2e)^{|C|} \text{const}'$$

mit einer nur von q und $r = \chi(\mathbb{Z}) \max\{|J_e|, |J_m|\}$ abhängenden Konstante const' . Die Summe Σ' geht über Terme linear in $W_q(C)$, d.h. jeder Term enthält genau ein C -Polymer und $n-1$ gewöhnliche Polymere. Gemäß Lemma 1.5 gilt dann für alle Terme, die zur Summe Σ' beitragen $|\gamma_1| + \dots + |\gamma_n| \geq A(C)$. Wie im Beweis von Lemma 1.3 folgt hieraus sofort die gewünschte Ungleichung. ■

Bemerkungen:

i) Man überzeugt sich leicht (siehe auch Lemma 1.7 und Korollar 1.8

Seite 22), daß für den Loop $C = C_{t\ell}$ $A(C) = \ell t / \varepsilon \tau$ ist. Damit folgt aus Satz 1.6 sofort Confinement für ∞ schwere Quarks, mit

$\sigma_q^{(W)} \geq (\varepsilon \tau)^{-1} \alpha$. Man beachte, daß die Ungleichung (1.29) dieselbe Schranke an $\sigma_q^{(W)}$ liefert wie (1.28).

ii) Ganz ähnlich beweist man untere Schranken an das Polyakov-Potential.

Statt in $C_{t\ell}$ eingespannte Γ -Flächen betrachtet man Γ -Flächen f , für die $d f$ auf $C_x \cup C_y$ lebt; C_x und C_y sind die beiden Polyakov-Loops. Die resultierende Schranke, wieder für nicht triviale Darstellungen des Zentrums und für $|J_m|, |J_e| < K_1/\chi(\mathbb{I})$, lautet

$$\langle \overline{L_q(x)} L_q(y) \rangle_\beta \leq \text{const} e^{-\alpha \beta |x-y| / \varepsilon \tau} \quad (1.30)$$

Es folgt $\sigma_{q,\beta}^{(P)} \geq (\varepsilon \tau)^{-1} \alpha$ sowie $\sigma_q^{(P)} \geq (\varepsilon \tau)^{-1} \alpha, \tilde{\sigma}_q^{(P)} \geq (\varepsilon \tau)^{-1} \alpha$.

Um das angekündigte Lemma 1.7 zu formulieren, benötige ich die folgende Notation. Es sei $C = C_{t\ell}$ und Σ die durch C aufgespannte Ebene (siehe Abschnitt 1.1). S_∞ bestehe aus den positiv orientierten Plaketten aus S . π bezeichne die Projektion von $\mathcal{L}$ auf Σ :

$\pi((x_0, x_1, \dots, x_d)) = (x_0, x_1, 0, \dots, 0)$. Ich will schließlich annehmen, daß $C_{t\ell}$ so orientiert ist, daß für Plaketten $p \in S_0$, die mit einem Link $\ell \in C$ zusammenhängen $-\ell \in \partial p$ ist. Dann gilt:

Lemma 1.7

Es sei f eine in $C_{t\ell}$ eingespannte Γ -Fläche, die Ladung q' trägt. Dann gilt

i) für $p \in S_\infty$ ist

$$\sum_{p': \pi(p') = p} f(p') = \begin{cases} 0 & \text{für } p \in S_\infty \setminus S_0 \\ q' & \text{für } p \in S_0 \end{cases}$$

ii) Für alle Plaketten $p \in S_0$ gibt es eine Plakette p' im Träger von f , so daß $\pi(p') = p$ ist.

Korollar 1.8:

Für $C = C_{t\ell}$ ist $A(C) = t\ell/\epsilon\tau$

Beweis des Korollars

Es sei f eine in $C_{t\ell}$ eingespannte Γ -Fläche. Da $C_{t\ell}$ doppelpunkt-frei ist, ist d^*f auf $C_{t\ell}$ konstant. Es gibt also ein $q' \in \Gamma$, so daß f Ladung q' trägt. Gemäß ii), Lemma 1.7 ist dann die Größe von f nach unten durch $|S_0| = t\ell/\epsilon\tau$ beschränkt. Also ist $A(C) \geq t\ell/\epsilon\tau$. Andererseits läßt sich stets eine in C eingespannte Γ -Fläche f finden, so daß $\text{supp}(f) = S_0$ ist. Also ist $A(C) = |S_0| = t\ell/\epsilon\tau$.

Beweis von Lemma 1.7

i) Es sei f eine in $C_{t\ell}$ eingespannte Γ -Fläche, die Ladung q' trägt. Es sei für $p \in S_\infty$

$$Q(p) = \sum_{p': \pi(p') = p} f(p')$$

Da f Ladung q' trägt ist

$$(d*f)(\ell) = \begin{cases} \bar{+} q & \text{für } \ell \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$(d*Q)(\ell) = \begin{cases} \bar{+} q & \text{für } \ell \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist $Q(p)$ auf S_0 und auf $S_\infty \setminus S_0$ konstant und es gilt weiter

$$Q(p') = Q(p) + q'$$

falls $p' \in S_0$ ist. Die Behauptung folgt nun sofort aus der Beobachtung, daß es Plaketten $p \in S_\infty$ gibt, so daß für alle Plaketten p mit $\pi(p') = p$ $f(p') = 0$ ist (f hat endlichen Träger).

ii) folgt sofort aus i). ■

Ich will diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen beenden, auf die ich häufiger im Verlaufe des Kapitels 2 zurückkommen werde. Zunächst definiere ich (ℓ' ist wieder dual zum Zentrum $Z(G)$, $q' \in \ell'$).

Definition 1.1:

Eine endliche Menge $\gamma \subset \mathbb{L}^{2+}$ heißt zulässiges C-Polymer, wenn

- i) γ eine zusammenhängende Menge ist
- ii) γ keine isolierten Randlinks besitzt
- iii) alle Links in C mit γ zusammenhängen
- iv) es eine in C eingespannte ℓ' -Fläche f gibt, die auf γ lebt und Ladung q' trägt.

Bemerkungen:

- iii) Es sei S_p gemäß (1.26) normiert und q eine Darstellung, die das Zentrum $Z(G)$ nicht trivial darstellt. Dann tragen gemäß Lemma 1.4 und 1.5 nur zulässige C-Polymere zur Entwicklung von $\langle W_q(C) \rangle$ bei.
- iv. Gemäß Lemma 2.7 ist für $C = C_{tL}$ die Aktivität $z_{q,C}(\gamma)$ eines C-Polymers γ stets Null, wenn $|\gamma| < S_0$ ist (und q das Zentrum nicht trivial darstellt). Wir wollen

$$z_{q,C}(S_0) = d_q^{-1} \int \chi_q(q_C) \prod_{p \in S_0} s_p$$

berechnen und verwenden hierzu die Fourierdarstellung von

$$s_p(q_p) = \sum_Q \lambda_Q d_Q \chi_Q(q_p) \quad (1.31)$$

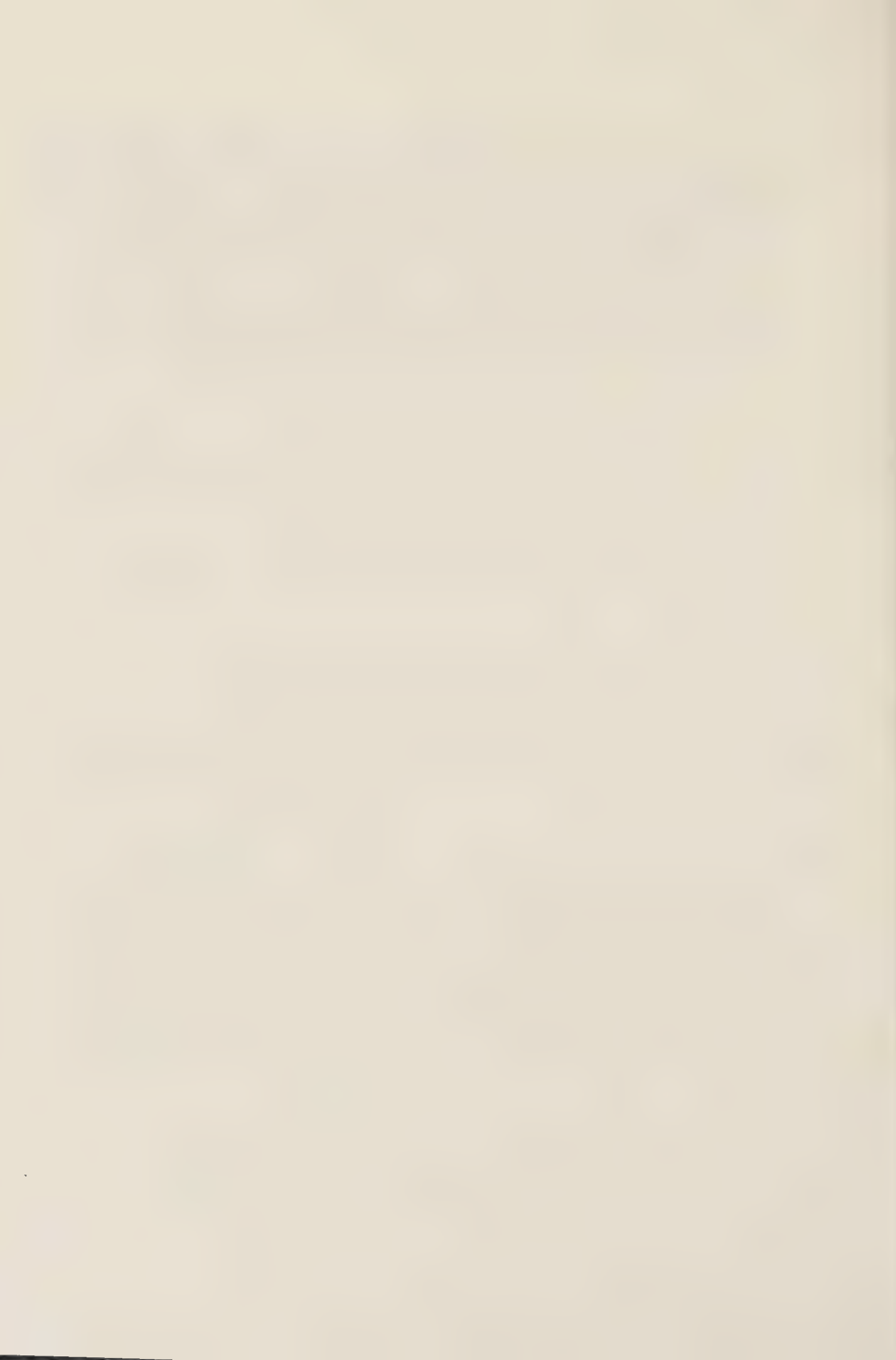
$$\lambda_Q = d_Q^{-1} \int \overline{\chi_Q(q)} s_p(q) dq \quad (1.32)$$

Mit Hilfe des Peter-Weyl-Theorems (man verwende Gleichung (D.4), Anhang D) errechnet sich $z_{q,C}(S_0)$ leicht zu

$$z_{q,C}(S_0) = \lambda_q^{|S_0|} \quad (1.33)$$

Man beachte, daß λ_q über die Kopplung J_p von der betrachteten Plakette abhängt. In die Aktivität von S_0 gehen nur zeitartige Plaketten ein, und man müßte streng genommen λ_q in (1.33) mit einem Index e (für $J_p = J_e$) versehen. Für symmetrische Gitter ($\varepsilon = \tau$), wie sie in Kapitel 2 meist betrachtet werden, ist diese Unterscheidung hinfällig.

v) Im folgenden Kapitel wird es häufig nicht von Bedeutung sein, daß die Plaketten $p \in \gamma$ positiv orientiert sind. Es sei $\mathbb{L}^{2u}$ die Menge der Äquivalenzklassen $\{p_1, p_2\} \subset \mathbb{L}^2$, so daß $p_1 = -p_2$ ist, d.h. $\mathbb{L}^{2u}$ sei die Menge der unorientierten Plaketten in $\mathbb{L}$. Ich sage $p' \in \mathbb{L}^{2+}$ und $p \in \mathbb{L}^{2u}$ sind einander zugeordnet, wenn $p' = p$ oder $-p' = p$ ist. $S \subset \mathbb{L}^{2u}$ heißt zulässige Zufallsfläche, wenn es ein zulässiges C-Polymer γ gibt, so daß S und γ einander zugeordnet sind. Da diese Zuordnung bijektiv ist, werden wir häufig nicht zwischen S und γ unterscheiden.



KAPITEL 2

DIE ENTWICKLUNG FÜR DIE SAITENSPIGUNG

2.1 Einführung

Im letzten Kapitel habe ich die Clusterentwicklung für Wilson-Loops

$$\langle W_q(C) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_{q,C}(\gamma_i) \quad (2.1)$$

benutzt, um eine untere Schranke an die Saitenspannung $\sigma_q^{(W)}$ zu beweisen. Hier will ich eine Clusterentwicklung für den Logarithmus $\log \langle W_q(C) \rangle$ herleiten, die es erlaubt, den Limes

$$\sigma_q^{(W)} = - \lim_{t, \ell \rightarrow \infty} \frac{1}{t\ell} \log \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle \quad (2.2)$$

durchzuführen¹. Ich werde hierzu die Abweichungen des C-Polymers γ_C von der minimalen Fläche S_0 (sowie die an γ_C hängenden Cluster von gewöhnlichen Polymeren) als neue, auf S_0 lebende Polymere betrachten. Bei geeignet definierten Aktivitäten für diese faktorisiert dann $\langle W_q(C) \rangle$ in den führenden Beitrag $z_{q,C}(S_0) = \lambda_q^{|S_0|}$ von (2.1) und die Zustandssumme $Z_q(S_0)$ des neuen Polymersystems:

$$\langle W_q(C) \rangle = \lambda_q^{|S_0|} Z_q(S_0) \quad (2.3)$$

Die Mayer-Entwicklung für Polymersysteme liefert dann den Logarithmus von $Z_q(S_0)$ in einer Form, die es gestattet, den Limes (2.2) durchzuführen.

¹ Sofern ich nicht explizit auf den Limes $t, \ell \rightarrow \infty$ Bezug nehme, werde ich statt $C_{t\ell}$ meist C schreiben.

Im Prinzip ist diese Idee nicht neu. Auf ihr beruht schon die Arbeit von Münster [1982]. Die von ihm skizzierte Polymerentwicklung für die Saitenspannung erweist sich jedoch als divergent, da die Aktivitäten der von Münster definierten Polymere nicht schnell genug abfallen (man kann auch sagen: weil der Kompatibilitätsbegriff von Münster zu eng gefasst wurde).

Ehe ich auf Einzelheiten eingehe, will ich einige Begriffe und Notationen festlegen. Ich normiere die Wirkung gemäß (1.26) und wähle eine Darstellung q für den Wilson-Loop, die das Zentrum von G nicht trivial darstellt. Um die Notation zu vereinfachen, setze ich² $\varepsilon = \tau = 1$ und beschränke mich auf $\nu = d+1 = 3$. Alle Resultate dieses Kapitels bleiben jedoch auch für leicht asymmetrische Gitter und für $\nu > 3$ wahr (siehe insbesondere die Anmerkung vii) zu Abschnitt 2.2).

Da die Clusterentwicklung für $\log < W_q(C) >$ relativ kompliziert ist, betrachte ich in einem ersten Schritt das vereinfachte System

$$\tilde{W}_q(C) := \sum_{\gamma} z_{q,C}(\gamma), \quad (2.4)$$

das nur C-Polymere (und keine gewöhnlichen Polymere) enthält. Die Berücksichtigung der gewöhnlichen Polymere geschieht zu einem späteren Zeitpunkt (Abschnitt 2.4).

Um die Idee von Münster zu erläutern, betrachte ich zunächst die Eichgruppe $G = Z_2 = \{-1, +1\}$. Für ein Polymer γ sei $\partial\gamma$ der Z_2 -Rand von γ , d.h. $\partial\gamma$ besteht aus allen Links, die zu einer ungeraden Anzahl von Plaketten in γ gehören. Die Plaketten in γ seien unorientiert. Der Index q in (2.4) wird überflüssig, da es nur eine nicht triviale Darstellung gibt. Man errechnet leicht, daß $z_C(\gamma)$ für C-Polymere mit $\partial\gamma = C$ gleich $(thJ)^{|\gamma|}$

²Damit wird $J_m = J_e$. Ich lasse deshalb den Index weg und schreibe J anstelle von J_m und J_e^m .

und für C-Polymere mit $\partial\gamma \neq C$ gleich Null ist. (2.4) wird somit zu einer Summe über Z_2 -Flächen mit vorgegebenem Rand C

$$\tilde{W}(C) = \sum_{\gamma \mid \partial\gamma = C} (\text{th } J)^{|\gamma|} \quad (2.5)$$

Es sei γ eine solche Z_2 -fläche. Wir folgen zunächst den Ideen von Münster und bezeichnen eine Plakette $p \in \gamma$ als angeregt (schreibe: $p \in \mathcal{A}$), wenn $p \notin S_0$ ist oder, wenn $p \in S_0$ ist und es eine Plakette $p' \in \gamma \setminus S_0$ mit $\pi(p') = p$ gibt. Die Zusammenhangskomponenten $A_1, \dots, A_n$ von $\mathcal{A}$ nennt man die γ zugeordneten Verzierungen (siehe Abb. 2.1).

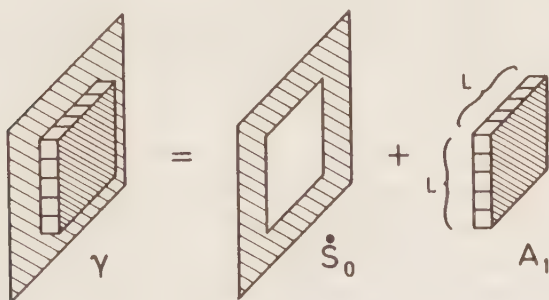


Abbildung 2.1: Zerlegung eines Polymers γ in die γ zugeordneten Verzierungen $A_1, \dots, A_n$ (hier ist $n=1$) und eine Fläche S_0 "mit Loch"

Die γ zugeordneten Verzierungen sind paarweise kompatibel³ und mit $z(A) = (\text{th } J)^{|A| - |S_0 \cap \pi(A)|}$ ist offenbar

$$z(\gamma) = z(S_0) \prod_{i=1}^n z(A_i)$$

³ Zwei Verzierungen A, A' heißen kompatibel, wenn $A \vee A'$ keine zusammenhängende Menge ist.

Da jeder Menge paarweise komptabiler Anregungen offensichtlich genau eine Z_2 -Fläche mit Rand C entspricht (man fülle einfach die Plaketten aus S_0 ein, die in keiner der Projektionen $\pi(A_i)$ liegen) schreibt sich $W(C)/z(S_0)$ als Zustandssumme eines Polymersystems:

$$\tilde{W}(C) = z(S_0) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{A_1, \dots, A_n\}} \frac{c}{n!} \prod_{i=1}^n z(A_i) \right] \quad (2.6)$$

Die resultierende Entwicklung für $\log \tilde{W}(C)$

$$\log \tilde{W}(C) = \log z(S_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{A_1, \dots, A_n} \frac{\phi_C(A_1, \dots, A_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z(A_i) \quad (2.7)$$

divergiert jedoch. Es sei nämlich A die Verzierung aus Abb. 2.1. Ihre Größe $|A| = 4L + L^2$ wächst quadratisch mit L während ihre Aktivität nur exponentiell mit L (statt mit L^2) fällt. Dies führt zur Divergenz der Entwicklung (2.7).

Da wir an einer konvergenten Entwicklung für die Saitenspannung interessiert sind, müssen wir die von Münster betrachtete Entwicklung modifizieren. Wir definieren: eine Plakette $p \in \gamma$ heißt flach, wenn⁴ sie parallel zu S_0 ist, und wenn es keine andere Plakette $p' \in \gamma$ gibt, so daß $\pi(p) = \pi(p')$ ist. Es sei F die Menge der flachen Plaketten in γ . Dann heißen die Zusammenhangskomponenten von F die flachen Teilstücke von γ , und die Zusammenhangskomponenten von $\gamma \setminus F$ die Wälle von γ (siehe Abb. 2.2).

Während die zuvor definierten Verzierungen stets mit S_0 zusammenhängen, gilt dies nicht für die jetzt definierten Wälle. Beispielsweise ist der Wall W_2 aus Abb. 4.1 auf dem flachen Teilstück F_2 "errichtet" und ist

⁴Tatsächlich werde ich in Abschnitt 2.2 aus beweistechnischen Gründen noch einmal etwas von diesen Definitionen abweichen. Man beachte insbesondere den dort eingeführten Begriff der quasi-flachen Plakette und den Begriff des π -Zusammenhangs.

deshalb eine Gittereinheit von S_0 entfernt. Insbesondere läßt sich W_2 alleine nicht als Anregung⁵ von S_0 auffassen, da man S_0 nicht mit W_2 zu einem C-Polymer zusammensetzen kann.

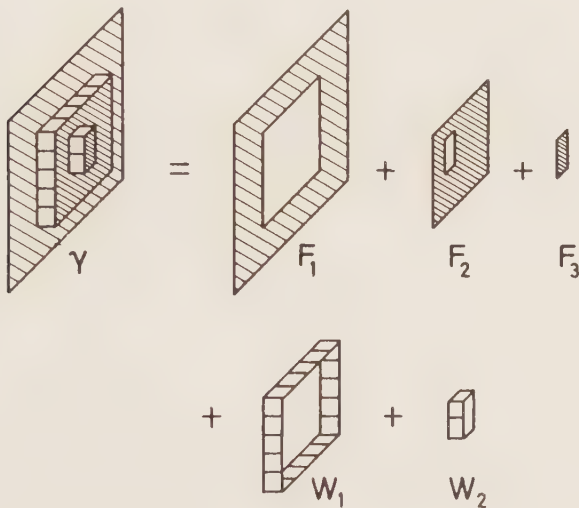


Abb. 2.2: Zerlegen eines C-Polymer γ in Wälle und flache Teilstücke.

⁵Unter einer Anregung von S_0 wollen wir eine Menge W von Plaketten verstehen, für die es ein zulässiges C-Polymer γ' gibt, welches W als einzigen Wall enthält. Wir werden im folgenden der Terminologie von Dobrushin, [1972] folgen und W unter diesen Bedingungen einen Standardwall nennen.

Verschiebt man jedoch $\tilde{W}_2$ senkrecht zu S_0 um eine Gittereinheit (auf S_0 zu), so ist der resultierende Wall $\tilde{W}_2$ ein Standardwall (siehe Fußnote S.30). Ich nenne die so verschobenen Wälle von γ die γ zugeordneten Standardwälle. Die Aktivität eines Standardwalles $\tilde{W}$ definiere ich als $z(\tilde{W}) = (\text{thJ})^{|\tilde{W}| - |\pi(\tilde{W}) \cap S_0|}$. Wieder gilt

$$z(\gamma) = z(S_0) \prod_{i=1}^n z(\tilde{W}_i) \quad (2.8)$$

sofern γ die Standardwälle $\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_n$ zugeordnet sind ($z(S_0) = (\text{thJ})^{|S_0|}$). Man beachte, daß $z(\tilde{W})$ diesmal exponentiell mit $|\tilde{W}|$ abfällt, statt mit $|\tilde{W}|^{1/2}$. Wir können also hoffen, daß die resultierende Entwicklung konvergiert.

Die obige Art, die γ zugeordneten Standardwälle zu definieren, wirft jedoch neue Fragen auf. Insbesondere zerstören die Translationen senkrecht zu S_0 die ursprünglichen Zusammenhangseigenschaften von γ . Da sich der Schatten $\pi(W)$ eines Walles W nicht unter diesen Translationen ändert, liegt es nahe, zwei Wälle W, W' als kompatibel zu definieren, wenn $\pi(W)$ und $\pi(W')$ nicht miteinander zusammenhängen. Es bleibt zu untersuchen, was dies für die Zusammenhangseigenschaften in $\mathcal{L}$ bedeutet. Insbesondere ist zu zeigen, daß es zu jedere Menge paarweise kompatibler Standardwälle genau ein zulässiges C-Polymer γ gibt, dem diese Standardwälle zugeordnet sind. Diese Fragen werden in Abschnitt 2.2 behandelt.

Als nächstes möchte ich erläutern, wie sich die bisher beschriebenen Techniken auf die für Elementarteilchenphysik relevanten Gruppen $U(N)$ und $SU(N)$ übertragen lassen. Für diese Gruppen läßt sich die Aktivität $z_{q,C}(\gamma)$ nicht mehr in der einfachen Form $\text{const } |\gamma|$ schreiben, und im allgemeinen wird es auch nicht möglich sein, die Aktivitäten $z(\tilde{W})$ so zu definieren, daß (2.8) gültig bleibt.

Wir betrachten zunächst den abel'schen Fall $G=U(1) = \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in [-\pi, \pi)\}$ mit den irreduziblen Darstellungen $\chi_q(e^{i\varphi}) = e^{iq\varphi}$, $q \in \mathbb{Z}$. Sowohl für die Wirkung, als auch für den Wilson-Loop wählen wir die fundamentale Darstellung $\chi_1(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$. Wir schreiben kurz $z_C(\gamma)$, statt $z_{1,C}(\gamma)$. Die Fourierzerlegung von $\mathcal{G}_P$

$$g_p(q_p) = \sum_{Q \neq 0} \lambda_Q \chi_Q(q_p)$$

$$\lambda_Q = \int dq \overline{\chi_Q(q)} g_p(q)$$

enthält aufgrund der Normierungsbedingung (1.26) nicht die triviale Darstellung $Q = 0$. Vermittels der "Orthonormierungsrelation"

$$\int dq \prod_{i=1}^n \chi_{Q_i}(q) = \delta(\sigma, \sum Q_i)$$

schreibt sich $z_C(\gamma)$ als eine Summe von "Ladungsverteilungen über γ "

$$z_C(\gamma) = \sum_Q' \prod_{p \in \gamma} \lambda_{Q(p)} \quad (2.9)$$

Die Summe $\sum'$ geht dabei über Funktionen $Q: \gamma \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, die der "Ladungserhaltung"

$$\sum_{p \in \gamma} Q(p) = \begin{cases} \pm 1 & \text{falls } \pm \ell \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.10)$$

genügen. Insbesondere führt (2.10) dazu, daß $Q(p) = 1$ auf allen flachen Plaketten $p \in \gamma$ ist (siehe Lemma 1.7, i)). Damit faktorisiert (2.9) aber in Summen über Ladungsverteilungen, die jeweils nur auf einem der Wälle $W_1 \dots W_n$ leben und man erhält

$$z_C(\gamma) = z_C(S_0) \prod_{i=1}^n z(\tilde{W}_i)$$

mit geeignet⁶ definierten Aktivitäten $z(\tilde{W})$.

Auch im nichtabel'schen Fall zerlegen wir g_p in seine "Fourierkomponenten" ($d_Q = \chi_Q(\mathbb{1})$)

$$g_p(q_p) = \sum_{Q \neq 0} \lambda_Q d_Q \chi_Q(q_p) \quad (2.11)$$

$$\lambda_Q = d_Q^{-1} \int \overline{\chi_Q(q)} g_p(q) dq$$

⁶siehe Abschnitt 2.3.

wobei $\mathcal{G}_p$ wieder nicht die triviale Darstellung $Q = 0$ enthält. Anders als im abel'schen Fall bildet der Raum der irreduziblen Darstellungen jedoch keine Gruppe. Insbesondere kann nun auch für flache Plaketten $Q(p)$ verschieden von der Darstellung q des Wilson-Loops sein. Aufgrund des Peter Weyl-Theorems ist $Q(p)$ allerdings auf jedem flachen Teilstück von γ konstant.

Es liegt nahe, die folgende Begriffsbildung einzuführen: Ein geordnetes Paar (γ, Q) heißt geladene Zufallsfläche, wenn γ ein zulässiges C-Polymer und Q eine Funktion von γ in den Raum $\hat{G}$ der irreduziblen Darstellungen von G ist, so daß $Q(p) \neq 0$ für alle Plaketten $p \in \gamma$ ist. Die Aktivität $\tilde{z}_q(\gamma, Q)$ der geladenen Zufallsfläche (γ, Q) ist dadurch definiert, daß $\mathcal{G}_p$ in $z_{q,C}(\gamma)$ durch $\lambda_{Q(p)} d_{Qp} \chi_{Q(p)}$ ersetzt wird.

Mit diesen Definitionen schreibt sich $\tilde{w}_q(C)$ dann als Summe über geladene Zufallsflächen

$$\tilde{w}_q(C) = \sum_{(\gamma, Q)} \tilde{z}_q(\gamma, Q)$$

Wir sagen $p \in \gamma$ ist nicht angeregt, wenn p flach ist und $Q(p) = q$ ist. Alle anderen Plaketten aus γ heißen angeregt. Es seien $A_1, \dots, A_n$ die Zusammenhangskomponenten der Menge aller angeregten Plaketten in γ . Q_1 sei die Einschränkung von Q auf A_1 . Dann heißen $\alpha_1 = (A_1, Q_1), \dots, \alpha_n = (A_n, Q_n)$ die Anregungen in (γ, Q) .

Es bleibt zu zeigen, daß es möglich ist, $\tilde{z}_q(\alpha)$ so zu definieren, daß $\tilde{z}_q(\gamma, Q)$ in die Aktivitäten $\tilde{z}_q(\alpha_i)$ und die Aktivität von S_0 faktorisiert

$$\tilde{z}_q(\gamma, Q) = z_{q,C}(S_0) \prod_{i=1}^n \tilde{z}_q(\alpha_i)$$

Dies ist Gegenstand von Abschnitt 2.3.

Am Ende dieses einleitenden Abschnitts möchte ich mich mit dem Einfluß der gewöhnlichen Polymere auf die Clusterentwicklung für $\log \langle W_q(C) \rangle$ beschäftigen. Im Prinzip ist dieses Problem nicht neu, da es auch bei der Tieftemperaturentwicklung für Spinsysteme mit koexistierenden Phasen auftritt, siehe [Bricmont, Lebowitz, Pfister, 1979]. Der dort eingeschlagene Weg läuft drauf hinaus, die gewöhnlichen Polymere aufzusummieren und das Resultat als ein langreichweitiges Vielkörperpotential für die Wälle von χ_C aufzufassen (χ_C bezeichnet hier ein zulässiges C-Polymer). Stattdessen ziehe ich es vor, einer Idee aus [Bricmont, Fröhlich, 1985b] zu folgen, und χ_C zusammen mit den gewöhnlichen Polymeren als eine neue, modifizierte Zufallsfläche aufzufassen. Diese zerlege ich wieder in Wälle und flache Teilstücke und verfare wie gehabt.*

Der Aufbau dieses Kapitels ist der folgende: In Abschnitt 2.2 werde ich die Geometrie der C-Polymere studieren. Viele der verwendeten Ideen gehen auf [Dobrushin, 1972] zurück, aber ohne die in [Borgs, 1984] eingeführten Modifikationen (man beachte insbesondere den Begriff der quasi-flachen Plaketten, siehe Definition 2.1) wäre eine rigorose Analyse der hier zu betrachtenden Zufallsflächen wohl ein hoffnungsloses Unterfangen.

In Abschnitt 4.3 betrachte ich die Eigenschaften der geladenen Zufallsflächen und insbesondere das Problem der "Faktorisierung der Aktivitäten". Die Konvergenz der resultierenden Entwicklung für $\log \tilde{W}_q(C)$ wird in 4.4 bewiesen.

Abschnitt 4.5 behandelt den Übergang von $\tilde{W}_q(C)$ zu $\langle W_q(C) \rangle$, und in Abschnitt 4.6 formuliere und diskutiere ich die resultierenden Theoreme für das Quark-Antiquark-Potential und die Saitenspannung $\sigma_q^{(W)}$.

* Die resultierende Entwicklung hat strukturell gewisse Ähnlichkeiten mit der "Aggregat-Entwicklung" für die Oberflächenspannung von Spinsystemen ohne Symmetrie-Eigenschaften von Holicky et al. [1986], siehe auch [Zahradnik, 1984].

2.2 Die Geometrie der Zufallsfläche

In diesem Abschnitt will ich die Geometrien der zulässigen C-Polymere γ_C studieren. Insbesondere wird jedem γ_C eine Menge paarweise kompatibler Standardwälle zugeordnet werden, und es wird gezeigt werden, daß es umgekehrt zu jeder Menge paarweise kompatibler Standardwälle genau ein zulässiges C-Polymer gibt, dem diese Standardwälle zugeordnet werden. Dies liefert klarerweise eine Darstellung von $\tilde{W}_q(C)$ als Summe über paarweise kompatible Standardwälle. Inwieweit die Aktivität von γ_C in die Aktivitäten der zugeordneten Standardwälle faktorisiert, wird in Abschnitt 2.3 untersucht werden.

Es wird in diesem Abschnitt meist nicht auf die Orientierung der Links und Plaketten in $\mathbb{L}$ ankommen. Statt $\mathbb{L}^1$ resp. $\mathbb{L}^2$ betrachte ich deshalb die unorientierten Links und Plaketten $\mathbb{L}^{1u}$ resp. $\mathbb{L}^{2u}$, statt γ_C die γ_C zugeordnete, zulässige Zufallsfläche. Ich verwende den Zusammenhangsbegriff aus Kapitel 1; $\ell = p_1 \wedge p_2$ ist eine Kurzschreibweise für $\{\ell\} = \partial p_1 \cap \partial p_2$; $\ell \in \partial p$, $\ell \neq p$ und " ℓ hängt mit p zusammen" sowie $p_1 \neq p_2$ und " p_1 und p_2 hängen zusammen" werden synonym gebraucht. Für eine Menge M von Plaketten bezeichne ∂M den "geometrischen Rand" von M , d.h. ∂M sei die Menge der Links $\ell \in \mathbb{L}^{1u}$, die mit genau einer Plakette in M zusammenhängen. ∂L für $L \subset \mathbb{L}^{1u}$ ist analog definiert.

$\omega = (p_1, \dots, p_n)$ heißt Weg aus Plaketten, wenn es Links $\ell_2, \dots, \ell_n$ gibt, so daß $\ell_{i+1} = p_{i+1} \wedge p_i$ und $\ell_j \neq \ell_{j+1}$ ist ($i = 1, \dots, n-1$; $j = 2, \dots, n-1$). $\ell_2, \dots, \ell_n$ heißen die Links in ω und $p_1, \dots, p_n$ die Plaketten in ω . Wir sagen häufig: " ω ist ein Weg von p_1 nach p_n " oder " ω beginnt in p_1 und endet in p_n " oder auch " ω verbindet p_1 und p_n ". ω heißt doppelpunktfrei, wenn die Links $\ell_2 \dots \ell_n$ und die Plaketten $p_1 \dots, p_n$ in ω paarweise verschieden sind. Für zwei Wege $\omega = (p_1 \dots p_n)$, $\omega' = (p'_1, \dots, p'_m)$ ist $\omega' \circ \omega = (p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_m)$ wieder ein Weg, sofern p'_1 und p_n zusammenhängen.

Um Wege aus Plaketten von "Wegen aus n.N. Paaren" zu unterscheiden, will ich letztere stets "Pfade" oder "Kurven" nennen: ein Pfad von x nach y ist somit eine geordnete Menge $L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ von Links, für die es Punkte $x_0, \dots, x_n$ in $\mathbb{L}$ mit $x_0 = x$, $x_n = y$ und $\ell_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ gibt. L heißt geschlossene Kurve, wenn $x=y$ ist. Insbesondere für doppelpunktfreie, geschlossene Kurven werde ich häufig nicht zwischen L und der entsprechenden ungeordneten Menge von Links unterscheiden. In diesem Sinne heißt $L \subset \mathbb{L}^{1u}$ eine doppelpunktfreie, geschlossene Kurve, wenn L zusammenhängend ist und jeder Punkt in $\mathbb{L}$ mit keinem oder mit genau zwei Links in L zusammenhängt.

Neben den bisher eingeführten Bezeichnungen benötige ich noch einige Begriffe und Notationen, die sich speziell auf die hier zu studierenden Probleme beziehen. Es seien x_0, x_1, x_2 die Koordinaten eines Punktes $x \in \mathbb{L} = \mathbb{Z}^3$. x_2 heißt dann die Höhe von x . Die Höhe einer Plakette ist die Höhe ihres Schwerpunktes. S_∞ bezeichne die Menge aller (unorientierten) Plaketten der Höhe Null, $S_0 \subset S_\infty$ sei das Innere der Kurve $C = C_{t\ell} \cdot \tilde{S}_0$ ist die Vereinigung von S_0 mit der Menge aller Links ℓ , die im Rand ∂p mindestens einer Plakette $p \in S_0$ enthalten sind; $\tilde{S}_\infty$ ist analog definiert. Eine Plakette p heißt horizontal, wenn sie parallel zu S_∞ ist, und sonst vertikal⁷.

Es bezeichne π die Projektion von $\mathbb{L}$ in die Menge der Punkte mit Höhe Null: $\pi((x_0, x_1, x_2)) = (x_0, x_1, 0)$. Es sei M eine Menge von Plaketten in $\mathbb{L}^{2u}$ und $\omega = (p_1, \dots, p_n)$ Weg in S_∞ . Dann heißt ein Weg $\omega' = (p'_1, \dots, p'_m)$ in M Lift von ω in M , wenn gilt

- i) alle Links in ω' sind horizontal
- ii) für alle Plaketten p' in ω' ist $\pi(p')$ ein Link oder eine Plakette in ω
- iii) für jede Plakette p in ω gibt es eine Plakette p' in ω' , so daß $\pi(p') = p$ ist
- iv) $\pi(p'_1) = p_1$, $\pi(p'_m) = p_n$.

⁷Mit diesen Definitionen geht die vertikale Richtung in Abb. 2.1 und 2.2 von links nach rechts.

Nach diesen Präliminarien definiere ich

Definition 2.1:

S sei eine zulässige Zufallsfläche. Dann heißt eine horizontale Plakette $p' \in S$ quasi-flach, wenn $p = \pi(p')$ in S_0 liegt und p' die einzige Plakette in S ist, die auf p projiziert wird. p' heißt flach, wenn zusätzlich gilt: Alle Plaketten $p'' \in S$, deren Projektion mit p zusammenhängt, sind quasi-flach.

Wir sagen: p' und $p'' \in S$ sind π -zusammenhängend, wenn $\pi(p')$ und $\pi(p'')$ zusammenhängen. Es sei F die Menge der flachen Plaketten in S . Dann heißen die Plaketten in $S \setminus F$ Wall-Plaketten, die π -Zusammenhangskomponenten $W_1, \dots, W_n$ von $S \setminus F$ die Wälle von S und die π -Zusammenhangskomponenten von F die flachen Teilstücke von S . Wir sagen auch: " S enthält die Wälle $W_1, \dots, W_n$ " und " W_1 ist Wall in S ".

$\pi(W)$ heißt der Schatten von W ; die Menge der Plaketten in $\pi(W)$ wird mit $P(W)$ bezeichnet. Zwei Wälle, W, W' heißen kompatibel, wenn ihre Schatten nicht miteinander zusammenhängen, und äquivalent, wenn sie durch Translation in vertikaler Richtung (d.h. senkrecht zu S_0) auseinander hervorgehen. Ein Wall in S heißt äußerer Wall, wenn sein Schatten mit C zusammenhängt und innerer Wall, wenn dies nicht der Fall ist.

Schließlich heißt eine Menge W von Plaketten Standardwall, wenn es eine zulässige Zufallsfläche S' gibt, die W als einzigen Wall enthält.

Ehe ich mich dem Studium der Wälle einer gegebenen zulässigen Zufallsfläche S zuwende, beweise ich einige Lemmas, die die Basis für alle weiteren Betrachtungen in diesem Abschnitt bilden. Zunächst zeige ich einige Eigenschaften der endlichen Teilmengen von S_∞ ; wir werden sie zum Studium des Schattens $\pi(W)$ eines vorgegebenen Walls W in S benötigen (Lemma 2.1). Lemma 2.2 beschäftigt sich mit der Möglichkeit des Liftings von Wegen, und in Lemma 2.3 werden die wichtigsten Eigenschaften der flachen Plaketten aus S zusammengefaßt.

Es sei M eine endliche, nicht leere Teilmenge von S_∞ . Dann heißt eine Plakette $p \in S_\infty$ von M eingeschlossen, wenn p weder in M noch in der ∞ Zusammenhangskomponente von $S_\infty \setminus M$ liegt. $\bar{M}$ bezeichne die Menge der Plaketten in S_∞ , die in M liegen oder von M eingeschlossen sind. Dann gibt es klarerweise keine Plaketten in S_∞ , die von $\bar{M}$ eingeschlossen sind. Weiter gilt

Lemma 2.1 (Teilmengen von S_∞):

Es sei $M \subset S_\infty$ zusammenhängend, endlich und nicht leer. $Z_1, \dots, Z_n$ seien die Zusammenhangskomponenten von $\bar{M} \setminus M$. Dann gilt

- i) $\bar{M}$ ist zusammenhängend
- ii) $\partial \bar{M}$ ist eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve
- iii) Für $i=1, \dots, n$ ist $Z_i = \bar{Z}_i$
- iv) $\partial Z_1, \dots, \partial Z_n$ sind geschlossene Kurven.

Beweis:

i) $Z_1, \dots, Z_n$ sind die endlichen Zusammenhangskomponenten von $S_\infty \setminus M$ und hängen deshalb mit M zusammen. Also ist mit M auch $\bar{M} = M \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ eine zusammenhängende Menge von Plaketten.

ii) Da $\partial \bar{M}$ Rand einer Menge von Plaketten in S_∞ ist, hängt jeder Punkt $x \in \mathbb{L}$ mit einer geraden Anzahl von Links in $\partial \bar{M}$ zusammen. Ich zeige zunächst, daß $\partial \bar{M}$ doppelpunktsfrei ist. Es sei nämlich $x \in \mathbb{L}$ gemeinsamer Punkt von vier Links $\ell_1, \dots, \ell_4$ in $\partial \bar{M}$. Es seien $p_1, \dots, p_4$ die vier Plaketten in S_∞ , die sich im Punkt x berühren. Ich will sie so numerieren, daß p_1 und p_2 , p_2 und p_3 , p_3 und p_4 sowie p_4 und p_1 zusammenhängen (siehe Abb. 2.3).

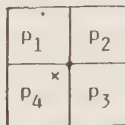


Abb. 2.3: Der Punkt x und die Plaketten $p_1, \dots, p_4$

Da $\ell_1, \dots, \ell_4$ in $\partial \bar{M}$ liegen, müssen entweder $p_1, p_3 \in \bar{M}$ und $p_2, p_4 \notin \bar{M}$ sein, oder umgekehrt. Ohne Einschränkung seien $p_1, p_3 \in \bar{M}$. Da $\bar{M}$ keine Plaketten in S_∞ einschließt, liegen p_2 und p_4 in der ∞ Zusammenhangskomponente von $S_\infty \setminus \bar{M}$. Also gibt es einen Weg ω in $S_\infty \setminus \bar{M}$, der p_2 und p_4 verbindet, im Widerspruch dazu, daß $p_1, p_3 \in \bar{M}$ sind und $\bar{M}$ nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht.

Es bleibt zu zeigen, daß $\partial \bar{M}$ eine zusammenhängende Menge von Links ist. Es seien $C_1 \dots C_n$ die Zusammenhangskomponenten von $\partial \bar{M}$, und $M_1, \dots, M_n$ seien die von $C_1, \dots, C_n$ umschlossenen Plaketten. Da $\bar{M}$ keine Plaketten in S_∞ einschließt, folgt offenbar $\bar{M} = M_1 \cup \dots \cup M_n$. Da $C_i = \partial M_i$ für $i \neq j$ nicht mit $C_j = \partial M_j$ zusammenhängt, hängen für $i \neq j$ M_i und M_j nicht zusammen, im Widerspruch dazu, daß $\bar{M}$ eine zusammenhängende Menge ist.

iii) Wir zeigen, daß $\bar{Z}_1 = Z_1$ ist. Da sowohl die ∞ Zusammenhangskomponente Z_0 von $S_0 \setminus M$ als auch $Z_2, \dots, Z_n$ mit M zusammenhängen, ist $S_\infty \setminus Z_1 = Z_0 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n \cup M$ zusammenhängend. Hieraus folgt, daß $Z_1 = \bar{Z}_1$ ist.

iv) Folgt sofort aus ii) und iii). ■

Lemma 2.2: (Liften von Wegen)

Es sei S eine zulässige Zufallsfläche und $\omega = (p_1, \dots, p_n)$ ein doppel-punktfreier Weg in S_0 . p_1 und p_n seien Projektionen von quasi-flachen Plaketten p' resp. p'' in S . Dann gibt es einen Weg ω' in S , der p' und p'' verbindet und Lift von ω in S ist.

Beweis:

Es sei γ das S zugeordnete, zulässige C-Polymer und f eine in C eingespannte Γ -Fläche, die auf γ lebt und Ladung q' trägt. Es sei I die Menge von Plaketten in γ , die auf eine Plakette oder ein Link in ω projiziert werden, und L sei die Menge von Links in Plaketten aus I , die auf die Links in ω projiziert werden. Da $L \cap C$ leer ist, gilt für $\ell \in L$

$$\sum_{p' \in T: \ell \in \partial p'} f(p') = 0 \quad (2.12)$$

Man zerlege I in maximale Mengen $I_1, \dots, I_r$, so daß die Plaketten in I_i über Links in L zusammenhängen. Es sei I_1 diejenige dieser Mengen, die p' enthält. Es genügt nun zu zeigen, daß I_1 einen Weg ω' enthält, der p' und p'' verbindet. Denn jeder solche Weg ist Lift von ω in S . Da I_1 eine zusammenhängende Menge von Plaketten ist, die p' enthält, bleibt nur noch $p'' \in I_1$ zu zeigen.

Es sei $f_1(p') = f(p')$ für $p' \in I_1$ und $f_1(p') = 0$ für $p' \notin I_1$. Dann gilt (2.12) offenbar auch für f_1 . Es folgt, daß

$$F_1(p) := \sum_{\substack{p' \in T \\ \pi(p') = p}} f_1(p')$$

auf ω konstant ist. Also ist $F_1(p_n) = F_1(p_1) = f(p')$. Nach Lemma 1.7 ist $f(p') = q' \neq 0$. Es folgt, daß I_1 mindestens eine Plakette enthält, die auf p_n projiziert wird. Da p'' die einzige Plakette in I ist, die auf p_n projiziert wird, ist hiermit gezeigt, daß $p'' \in I_1$ ist. ■

Lemma 2.3: (flache und quasi-flache Plaketten)

Es sei S eine zulässige Zufallsfläche. Dann gilt:

- i) $\forall p' \in S. \exists p'' \in S \quad \pi(p') = p''$
- ii) Es sei $p'_1 \in S$ flach und $p'_2 \in S$ quasi-flach. Wenn ihre Projektionen zusammenhängen, dann haben p'_1 und p'_2 dieselbe Höhe.
- iii) Es seien $p'_1, p'_2 \in S$ flache Plaketten, deren Projektionen sich in einem Punkt berühren. Dann haben p'_1 und p'_2 dieselbe Höhe.
- iv) Jedes flache Teilstück von S ist eine zusammenhängende Menge von Plaketten.
- v) Jedes flache Teilstück von S , dessen Projektion mit C zusammenhängt, hat Höhe Null.

Beweis:

- i) folgt aus Lemma 1.7
- ii) folgt aus der Tatsache, daß S keine isolierten Randlinks enthält.
Es sei nämlich $\mathcal{L}'$ dasjenige Link in $\partial p_1'$, das auf $\pi(p_1') \cap \pi(p_2')$ projiziert wird. Da p_1' flach ist, gibt es keine vertikalen Plaketten, deren Projektion mit $\pi(p_1')$ zusammenhängt. Insbesondere gibt es keine vertikalen Plaketten, die $\mathcal{L}'$ enthalten. Deshalb wäre $\mathcal{L}'$ isoliertes Randlink von S , wenn p_2' nicht dieselbe Höhe wie p_1' hätte.
- iii) Es sei $p_1 = \pi(p_1')$, $p_2 = \pi(p_2')$. Gemäß ii) können wir ohne Einschränkung annehmen, daß p_1 und p_2 nicht zusammenhängen. Da p_1 und p_2 sich in einem Punkt berühren, gibt es eine Plakette $p_3 \in S_0$, die mit p_1 und p_2 zusammenhängt. p_3 muß dann Projektion einer quasi-flachen Plakette sein und wir können ii) anwenden, um zu schließen, daß p_1' und p_2' dieselbe Höhe haben.
- iv) Folgt sofort aus ii)
- v) Es sei $p' \in S$ flach, $\pi(p')$ hängt mit $\mathcal{L} \in C$ zusammen. Da p' flach ist, kann es keine andere Plakette in S geben, deren Projektion mit $\mathcal{L}$ zusammenhängt. Aus der Tatsache, daß S keine isolierten Links enthält, folgt, daß p' Höhe Null hat. ■

Ich wende mich nun dem Studium der Wälle einer zulässigen Zufallsfläche zu. Ziel wird es sein, jedem Wall in S eine Höhe $h(W)$ so zuzuordnen, daß

$$\Delta(W) := t_{-h(W)}(W) \quad (2.13)$$

ein Standardwall ist. t_{-h} bezeichne dabei die Translation um $-h$ in vertikaler Richtung: $t_{-h}((x_0, x_1, x_2)) = (x_0, x_1, x_2 - h)$.

In der folgenden Bemerkung fasse ich zunächst einige einfache Konsequenzen aus Lemma 2.3 zusammen. Danach untersuche ich die Geometrie der inneren Wälle (Lemma 2.4), um dann folgern zu können, daß jeder innere Wall vermittle (2.13) äquivalent zu einem Standardwall ist. (Lemma 2.5). Anschließend wende ich mich dem Studium der äußeren Wälle zu (Lemma 2.6 und 2.7).

In der folgenden Bemerkung sei S stets eine zulässige Zufallsfläche und W ein Wall in S .

Bemerkung:

- i) Alle Plaketten in $S_0 \setminus \pi(W)$, die mit $\pi(W)$ zusammenhängen, sind Projektionen von flachen Plaketten in S .
- ii) Es sei ℓ ein Link in $\pi(W)$. Dann liegen alle Plaketten aus S_0 , die mit ℓ zusammenhängen, in $P(W)$.
- iii) Alle Plaketten $p \in P(W)$, die mit der Projektion einer flachen Plakette zusammenhängen, sind Projektionen von quasi-flachen Plaketten.

Beweis:

- i) folgt sofort aus der Definition eines Walles
- ii) Es sei $p \in S_0$, $\ell \in \partial p$. Da $p \in S_0$ ist, gibt es eine Plakette $p' \in S$ mit $\pi(p') = p$. Da p' nicht flach ist, und $\pi(p')$ mit $\pi(W)$ zusammenhängt, ist $p' \in W$ und somit $p \in P(W)$.
- iii) folgt sofort aus der Definition der flachen Plaketten. ■

Lemma 2.4:

Es sei S zulässige Zufallsfläche und W innerer Wall in S . Dann gilt

- i) $\pi(W) \subset \tilde{S}_0$
- ii) $P(W)$ ist zusammenhängend
- iii) W ist zusammenhängend
- iv) $\forall \ell \in \partial P(W), \exists \ell' \in \partial W, \pi(\ell') = \ell$
- v) $\ell_1, \ell_2 \in \partial P(W)$ seien zusammenhängend. Dann haben die entsprechenden Links in ∂W dieselbe Höhe
- vi) $\forall \ell \in \partial W$ ist $\pi(\ell) \in \partial P(W)$

Beweis:

i) Ann.:

Da S mit C zusammenhängt, gibt es einen Weg $\omega = (p_1, \dots, p_n)$, der in p beginnt und in einer Plakette p_n endet, die mit C zusammenhängt. Es sei p_k die erste Plakette in ω , deren Projektion mit C zusammenhängt. Dann ist $M = \{p_1, \dots, p_k\}$ zusammenhängend und damit π -zusammenhängend. Andererseits folgt aus der Definition eines Walls, daß jede π -zusammenhängende Menge M' von Wall-Plaketten, die eine Plakette mit W teilt, Teilmenge von W ist. Da M aus Wall-Plaketten besteht und $p_1 = p \in W$ ist, ist also $M \subset W \Rightarrow \pi(W)$ hängt mit C zusammen, im Widerspruch dazu, daß W innerer Wall ist.

ii) Es sei $\ell \in \pi(W)$. Da W innerer Wall ist, liegen alle Plaketten $p \in S_\omega$, die mit W zusammenhängen, in S_0 , und damit auch in $P(W)$ (Bemerkung ii)). Es folgt, daß mit $\pi(W)$ auch $P(W)$ eine zusammenhängende Menge ist.

iii) Ich zeige zunächst, daß jede Zusammenhangskomponenten W' von W eine quasi-flache Plakette enthält. Es sei $p'_1 \in W'$ und $\omega' = (p'_1, \dots, p'_n)$ ein Weg in S , p'_n hänge mit C zusammen. Da W innerer Wall ist, gibt es mindestens eine flache Plakette in ω' (sonst würde W' und damit $\pi(W)$ mit C zusammenhängen). Es sei p'_k die erste flache Plakette in ω' . Dann ist p'_{k-1} die gesuchte quasi-flache Plakette.

Es seien nun W_1, W_2 zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten von W . $p'_1 \in W_1, p'_2 \in W_2$ seien quasi-flach. Da $P(W)$ zusammenhängt, gibt es einen doppelpunktfreien Weg W in $P(W)$ der $\pi(p'_1)$ und $\pi(p'_2)$ verbindet. Gemäß Lemma 2.2 (Liften von Wegen) gibt es dann einen Weg ω' in W , der p_1 und p_2 verbindet, im Widerspruch dazu, daß p'_1 und p'_2 in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von W liegen.

iv) Es sei $\ell \in \partial P(W)$. Da W innerer Wall ist, ist $\ell \in S_0 \setminus C$. Also ist $\ell = p_1 \cap p_2$ mit $p_1 \in S_0 \setminus \pi(W), p_2 \in P(W)$. p_1 ist dann Projektion einer flachen Plakette p'_1 und p_2 ist Projektion einer quasi-flachen Plakette p'_2 (Bemerkung i) bzw. iii)). $p'_1 \cap p'_2$ ist das gesuchte, eindeutig bestimmte Link ℓ' , das auf ℓ projiziert wird.

- v) Es seien ℓ'_1, ℓ'_2 die beiden Links in ∂W , die auf ℓ_1 bzw. ℓ_2 projiziert werden. p'_1, p'_2 seien die flachen Plaketten in S , die ℓ'_1 bzw. ℓ'_2 enthalten. (p'_1 und p'_2 können unter Umständen identisch sein). Dann hängen $\pi(p'_1)$ und $\pi(p'_2)$ zusammen oder berühren sich in einem Punkt. In beiden Fällen haben p'_1 und p'_2 dieselbe Höhe (Lemma 2.3) und damit auch ℓ'_1 und ℓ'_2 .
- vi) Es sei $\ell \in \partial W$. Da W innerer Wall ist, ist $\ell' \neq C$ und somit ist $\ell' = p'_1 \cap p'_2$ mit $p'_1 \in S \setminus W$ und $p'_2 \in W$. p'_1 muß dann flach und p'_2 quasi-flach sein. Es folgt, daß $\pi(\ell') \in \partial P(W)$ ist. ■

Wir definieren nun die Randkurven eines inneren Walls und beweisen anschließend, daß jeder innere Wall äquivalent zu einem Standardwall ist. Es sei W innerer Wall und $Z_0, \dots, Z_n$ seien die Zusammenhangskomponenten von $S_\infty \setminus P(W)$, Z_0 bezeichne die unendliche Zusammenhangskomponente. Da $P(W)$ zusammenhängt (Lemma 2.4), sind $\partial Z_0, \dots, \partial Z_n$ geschlossene doppel-punktfreie Kurven (Lemma 2.2). Aufgrund von Lemma 2.4, Teil iv) bis vi) gibt es eindeutig bestimmte Kurven $C_0, \dots, C_n$ aus horizontalen Links, so daß $\partial W = C_0 \cup \dots \cup C_n$ ist und $\pi(C_i) = \partial Z_i$ ist. Ich nenne C_0 die äußere Randkurve von W und $C_1, \dots, C_n$ die inneren Randkurven von W . Ich definiere die Höhe von W durch $h(W) := h(C_0)$ und den Drift $\Delta(W)$ durch $\Delta(W) = t_{-h(W)}(W)$, wobei $t_h(\cdot)$ die Translation um h in vertikaler Richtung bezeichnet. Man beachte, daß jede Plakette in $S \setminus W$, die mit C_i zusammenhängt flach, und jede Plakette in W , die mit C_i zusammenhängt, quasi-flach ist. Weiter haben C_i und C_j für $i \neq j$ keine gemeinsamen Links.

Lemma 2.5:

Es sei S zulässige Zufallsfläche und W innerer Wall in S . Dann gilt

- i) $\Delta(W)$ ist Standard Wall
- ii) $\Delta(W)$ ist der einzige, zu W äquivalente Standard Wall
- iii) Die zulässige Fläche S' , die $\Delta(W)$ als einzigen Wall enthält, ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

i) Es seien $C_0, \dots, C_n$ die Randkurven von $\Delta(W)$, C_0 bezeichne die äußere Randkurve. Die Zusammenhangskomponenten $Z_0, \dots, Z_n$ von $S_0 \setminus \pi(W)$ seien so geordnet, daß $\partial Z_0 = C \cup C_0$ und $\partial Z_i = \pi(C_i)$ ist ($i = 1, \dots, n$). Dann definiere ich $F_i = t_h(C_i)$ (Z_i), $F = F_0 \cup \dots \cup F_n$ und $S' = F \cup \Delta(W)$. Da $F_0, \dots, F_n$ und $\Delta(W)$ zusammenhängende Mengen sind und $F_0, \dots, F_n$ mit $\Delta(W)$ zusammenhängt, ist S' eine zusammenhängende Menge. Per Konstruktion ist $\partial F_0 = C \cup C_0$ und $\partial F_i = C_i$ ($i = 1, \dots, n$). Es folgt, daß S' keine isolierten Randlinks besitzt und daß jedes Link in C mit S' zusammenhängt.

Es bleibt zu zeigen, daß es eine in C eingespannte Γ -Fläche f' gibt, die auf S' lebt und Ladung q' trägt (siehe Definition 1.1). Da S zulässige Zufallsfläche ist, gibt es eine in C eingespannte Γ -Fläche f , die auf S lebt und Ladung q' trägt. Man beachte, daß f auf allen quasi-flachen Plaketten den Wert q' annimmt (Lemma 1.7). Wir definieren: $\omega(p) = 0$ für $p \notin W$ und $\omega(p) = f(p)$ für $p \in W$; $\omega'(p) = \omega(t_h(p))$, wobei h die Höhe von W sei. $\varepsilon(p) = q'$ für $p \in F$ und $\varepsilon(p) = 0$ für $p \notin F$. $f' = \omega' + \varepsilon$ ist dann eine in C eingespannte Γ -Fläche, die auf S' lebt und Ladung q' trägt.

- ii) Man überzeugt sich leicht, daß jeder Standardwall W' der gleichzeitig innerer Wall ist, Höhe Null hat. Hieraus folgt die Behauptung
- iii) folgt sofort aus der Tatsache, daß S' keine isolierten Links enthält. ■

Die Geometrie der äußeren Wälle erweist sich als etwas komplizierter. Insbesondere muß nun weder W noch $P(W)$ eine zusammenhängende Menge sein. Ich benötige die folgenden Bezeichnungen:

Es sei S zulässige Zufallsfläche und W äußerer Wall in S . Dann ist

$$\delta W := (L(W) \cap C) \cup (L(W) \cap L(S \setminus W)) \quad (2.14)$$

wobei für eine beliebige Menge M von Plaketten $L(M)$ die Menge derjenigen Links ℓ bezeichne, für die es eine Plakette $p \in M$ mit $\ell \in \partial p$ gibt. Streng genommen wäre es korrekter, δW mit $\delta_S W$ zu bezeichnen, da die Zufallsfläche S in die Definition (2.14) mit eingeht. Das folgende Lemma, Teil i) liefert jedoch eine Beschreibung von $\delta_S W$, in die S nicht eingeht. Ich bleibe deshalb bei der Bezeichnung δW . Schließlich definiere ich:

$$\pi'(W) = \pi(W) \cap \tilde{S}_0, \quad P'(W) = P(W) \cap S_0.$$

Bemerkung:

iv) Für alle äußeren Wälle ist $P'(W)$ nicht leer.

Beweis:

Ich benutze die weiter unten bewiesene Tatsache, daß alle Zusammenhangskomponenten von W mit C zusammenhängen. Also gibt es Link $\ell \in C$ und eine Plakette $p' \in W$, so daß ℓ und p' zusammenhängen. $\Rightarrow$ die Plakette $p \in S_0$, die mit ℓ zusammenhängt, ist nicht flach. Da p und $\pi(p')$ zusammenhängen $\Rightarrow p \in \pi'(W)$. ■

Lemma 2.6:

Es sei S zulässige Zufallsfläche und W äußerer Wall in S . Dann gilt

- i) $\delta W = (L(W) \cap C) \cup (\partial W \setminus C)$
- ii) Alle Zusammenhangskomponenten von $P'(W)$ hängen mit C zusammen
- iii) Alle Zusammenhangskomponenten von W hängen mit C zusammen
- iv) $\forall \ell \in \partial P'(W), \exists \ell' \in \delta W : \pi(\ell') = \ell$
Wenn $\ell \in \partial P'(W) \cap C$ ist, hat ℓ' die Höhe Null.
- v) $\ell_1, \ell_2 \in \partial P'(W)$ seien zusammenhängend. Dann haben die entsprechenden Links in δW dieselbe Höhe
- vi) $\forall \ell' \in \delta W$ ist $\pi(\ell') \in \partial P'(W)$

Beweis:

- i) Wir zeigen, daß $L(W) \cap L(S \setminus W) = \partial W \setminus C$ ist. Es sei $\ell' \in L(W) \cap L(S \setminus W)$;
 $\ell' = p'_1 \cap p'_2$ mit $p'_1 \in S \setminus W$, $p'_2 \in W$. Dann ist p'_1 flach und p'_2 quasi-flach
 (Bemerkung iii)), also ist $\ell' \in \partial W$. Da p'_1 und p'_2 quasi-flach sind,
 kann $\pi(\ell')$ und damit ℓ' nicht in C liegen, d.h. $\ell' \in \partial W \setminus C$. Es
 sei umgekehrt $\ell' \in \partial W \setminus C$. Da S keine isolierten Links enthält, ist
 dann $\ell' \in L(W) \cap L(S \setminus W)$.
- ii) Da $\pi(W)$ eine zusammenhängende Menge ist, hängen alle Zusammenhangs-
 komponenten von $\pi'(W)$ mit C zusammen. Die Behauptung folgt nun sofort
 aus der Tatsache, daß $\pi'(W)$ mit jedem Link $\ell \in \tilde{S}_0$ auch alle Plaketten
 $p \in S_0$ enthält, die mit ℓ zusammenhängen (Bem. ii)).
- iii) Es sei W' eine Zusammenhangskomponente von W und $p'_1 \in W'$. Da S eine
 zusammenhängende Menge ist, die mit C zusammenhängt, gibt es stets
 einen Weg ω' in S der p'_1 mit einer Plakette p'_n verbindet die mit
 C zusammenhängt. Wenn ω' keine flache Plakette enthält, hängt W'
 mit C zusammen. ω' enthalte also ohne Einschränkung eine oder mehrere
 flache Plaketten. p'_{k+1} sei die erste flache Plakette in ω' . Dann
 ist p'_k quasi-flach (Bem. iii)).
- Es sei P' die Zusammenhangskomponente von $P'(W)$, die $\pi(p'_k)$ enthält
 und $\omega'_1 := (p'_1, \dots, p'_{k-1})$.
- Es sei $\ell \in C$ ein Link, das mit P' zusammenhängt. Da alle Links in
 C mit S zusammenhängen, gibt es einen Weg ω'' in S , der p'_k mit einer
 Plakette p'_r verbindet, die mit ℓ zusammenhängt. Wieder enthalte ω''
 ohne Einschränkung mindestens eine flache Plakette. $p'_{\ell-1}$ sei die
 letzte flache Plakette in ω'' . Dann ist p'_ℓ quasi-flach und $\pi(p'_\ell)$
 liegt in P' . Wir setzen $\omega'_3 := (p'_{\ell+1}, \dots, p'_r)$.
- Es sei ω ein doppelpunktfreier Weg in P' , der $\pi(p'_k)$ und $\pi(p'_\ell)$
 verbindet. Dann gibt es aufgrund von Lemma 2.2 (Liften von Wegen)
 einen Weg ω'_2 in W , der p'_k und p'_ℓ miteinander verbindet. $\omega'_3 \circ \omega'_2 \circ$
 ω'_1 ist dann ein Weg in W , der p'_1 mit einer Plakette p'_r verbindet,
 die mit C zusammenhängt; also hängt W' mit C zusammen.

- iv) Sofern $\ell \in \partial P'(W) \setminus C$ ist, verfährt man wie im Beweis von Lemma 2.4. Wenn $\ell \in \partial P'(W) \cap C$ ist, gibt es stets eine Plakette p' in S , die mit ℓ zusammenhängt. Da $\pi(p')$ mit $\pi(W)$ zusammenhängt, ist $p' \in W$ und somit $\ell \in L(W) \cap C$. Zu zeigen bleibt, daß es kein weiteres Link $\ell' \in \delta W$ gibt, so daß $\pi(\ell') = \ell$ ist. Gemäß i) läge ein solches Link in $\partial W \setminus C$, und ist somit gemeinsames Link einer flachen und einer quasi-flachen Plakette in S (Bem. i) bzw. ii)), im Widerspruch dazu, daß $\ell = \pi(\ell') \in C$ ist.
- v) ℓ'_1, ℓ'_2 seien die eindeutig bestimmten Links in δW , die auf ℓ_1 resp. ℓ_2 projiziert werden. Wenn weder ℓ_1 noch $\ell_2 \in C$ ist, verfährt man wie im Beweis von Lemma 2.4. Wenn ℓ_1 und $\ell_2 \in C$ sind, ist $\ell'_1 = \ell'_2 = \ell'_1 = \ell'_2$, d.h. sowohl ℓ'_1 als auch ℓ'_2 haben die Höhe Null. Es sei also ohne Einschränkung $\ell_1 \in C, \ell_2 \notin C$. Zu zeigen ist, daß ℓ'_2 die Höhe Null hat. Es sei p'_2 die flache Plakette in S , die mit ℓ'_2 zusammenhängt. Dann hängt $\pi(p'_2)$ mit C zusammen. Also hat p'_2 und damit auch ℓ'_2 die Höhe Null (Lemma 2.3, v)).
- vi) Für $\ell' \notin C$ verfähre man wie im Beweis von Lemma 2.4. Für $\ell' \in \delta W \cap C = \partial W \cap C$ folgt aus der Definition einer flachen Plakette und Lemma 2.3 i), daß die Plakette $p \in S_0$, die mit ℓ' zusammenhängt, in $P'(W)$ liegt.
 $\Rightarrow \ell' = \pi(\ell') \in \partial P'(W)$ ■

Bemerkungen:

- v) Es gibt keine Plaketten in $S \setminus W$, die mit $\delta W \cap C$ zusammenhängen. Dies folgt sofort daraus, daß $L(W) \cap L(S \setminus W) = \partial W \setminus C$ ist (wie im Beweis von Lemma 2.6, Teil i) gezeigt wurde).
- vi) Es sei Z eine Zusammenhangskomponente von $S_0 \setminus \pi(W) = S_0 \setminus P'(W)$. Es ist eine einfache Konsequenz aus Lemma 2.6, Teil ii), daß dann $Z = \bar{Z}$ und somit ∂Z eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve ist.

Wir definieren die Randkurven eines äußeren Wall W . Es seien $Z_1, \dots, Z_n$ diejenigen Zusammenhangskomponenten von $S_0 \setminus \pi(W)$, die von einer Zusammenhangskomponente von $P'(W)$ eingeschlossen werden. Dann ist für $i = 1, \dots, n$ ∂Z_i eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve und weiter ist $\partial Z_i \subset \partial P'(W)$. Also gibt es eindeutig bestimmte Kurven $C_1, \dots, C_n$ in δW , so daß $\pi(C_i) = \partial Z_i$ ist. Ich nenne $C_1, \dots, C_n$ die inneren Randkurven von W und $h_i := h(C_i)$ die Z_i zugeordnete Höhe⁸.

Es seien $P_1, \dots, P_m$ die Zusammenhangskomponenten von $P'(W)$, $\bar{P}_i$ sei die Vereinigung von P_i mit den von P_i eingeschlossenen Plaketten in S_∞ . Dann ist für $i = 1, \dots, m$ $\partial \bar{P}_i \subset \partial P'(W)$ und somit gibt es eindeutig bestimmte Kurven $C_{n+1}, \dots, C_{n+m}$ in δW , so daß $\pi(C_{n+i}) = \partial \bar{P}_i$ ist. Ich nenne $C_{n+1}, \dots, C_{n+m}$ die äußeren Randkurven von W . Aufgrund von Lemma 2.6, Teil iv) und v) haben alle äußeren Randkurven von W Höhe Null; ich ordne dem äußeren Wall W deshalb die Höhe $h(W) = 0$ zu.

Ehe ich das folgende Lemma 2.7 formuliere, möchte ich noch bemerken, daß per Konstruktion C_i und C_j für $i \neq j$ keine gemeinsamen Links haben ($i, j = 1, \dots, n+m$) und daß $\delta W = C_1 \vee \dots \vee C_{n+m}$ ist.

Lemma 2.7:

Es sei S zulässige Zufallsfläche und W äußerer Wall in S . Dann gilt

- i) W ist Standard Wall
- ii) Die zulässige Zufallsfläche S' , die W als einzigen Wall enthält, ist eindeutig bestimmt.

⁸Für Zusammenhangskomponenten Z_j von $S_0 \setminus \pi(W)$, die von keiner Zusammenhangskomponente von $P'(W)$ eingeschlossen werden, definiere ich $h_j = 0$.

Beweis:

i) Es seien $Z_1, \dots, Z_r$ die Zusammenhangskomponenten von $S_0 \setminus \pi(W)$, wobei $Z_1, \dots, Z_n$ die von einer Zusammenhangskomponente von $P'(W)$ eingeschlossenen Zusammenhangskomponenten bezeichne. h_i sei die Z_i zugeordnete Höhe. Schließlich seien $C_1, \dots, C_n$ die inneren und $C_{n+1}, \dots, C_{n+m}$ die äußeren Randkurven von C . Ich definiere $F_i = t_{h_i}(Z_i)$, $F = F_1 \cup \dots \cup F_r$ und $S' = F \cup W$.

Man zeigt sofort unter Verwendung von Lemma 2.6, daß $\partial W \setminus C = \partial F \setminus C$ ist, d.h. daß S' keine isolierten Randlinks besitzt. Weiter hängt jedes Link ℓ in $C \setminus \partial W$ mit einer Komponente Z_j zusammen, für die $h_j = 0$ gesetzt wurde. Also hängt ℓ mit F zusammen. Es folgt, daß alle Links in C mit S' zusammenhängen. Schließlich kann man ebenso wie im Beweis von Lemma 2.5 eine in C eingespannte $\mathcal{F}$ -Fläche konstruieren, die auf S' lebt und Ladung q' trägt.

Es bleibt zu zeigen, daß S' eine zusammenhängende Menge ist. Ich beweise zunächst, daß alle Zusammenhangskomponenten von W mit F zusammenhängen. Es sei $p'_1 \in W$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (o.E.d.A.) sei $S \setminus W$ nicht leer. Dann gibt es einen Weg ω' in S , der p'_1 mit einer flachen Plakette p' in S verbindet. Es sei p'_k die erste flache Plakette in ω' . Dann ist p'_{k-1} quasi-flach und hat dieselbe Höhe wie $p'_k \in S$. Andererseits haben wir schon gezeigt, daß S' keine isolierten Randlinks besitzt. Also muß $p'_k \in S'$ und damit $p'_k \in F$ sein. Da $p'_1, \dots, p'_{k-1}$ in W liegen, ist gezeigt, daß diejenige Zusammenhangskomponente von W , die p'_1 enthält, mit F zusammenhängt. Da $p'_1 \in W$ beliebig war, hängen alle Zusammenhangskomponenten von W mit F zusammen.

Es genügt somit zu zeigen, daß sich zwei beliebige Plaketten p' , p'' in F durch einen Weg in S' verbinden lassen. Es sei $\omega = (p_1, \dots, p_n)$ ein doppelpunktfreier Weg in S_0 , der $\pi(p')$ und $\pi(p'')$ miteinander verbindet. Wir zerlegen ω in Teilstücke $\omega_1, \dots, \omega_N$

$$\omega_i = (p_{n_i+1}, \dots, p_{n_{i+1}})$$

($0 = n_1 < n_2 < \dots < n_{N+1} = n$), so daß $\omega_1, \omega_3 \dots$ ganz in $S_0 \setminus \pi(W)$ und $\omega_2, \omega_4, \dots$ ganz in $P'(W)$ verlaufen. Wenn ω_i ganz in $S_0 \setminus \pi(W)$ verläuft, muß ω_i ein Weg aus Plaketten in einer Zusammenhangskomponente Z_k von $S_0 \setminus \pi(W)$ sein. Wir setzen dann $\omega_i' = t_{n_k}(\omega_i)$. Wenn ω_i ganz in $P'(W)$ verläuft, verwenden wir Lemma 2.2 um einen Weg ω_i' in S zu finden, der Lift von ω_i ist. Da ω_i' Lift eines Weges in $P'(W)$ ist, ist ω_i' ein Weg aus Plaketten in W . Für $i = 1, \dots, N-1$ hängt nun stets die erste Plakette in ω_{i+1}' mit der letzten Plakette in ω_i' zusammen (das gemeinsame Link liegt in $\partial W \setminus C$). Damit ist $\omega' = \omega_N' \circ \dots \circ \omega_1'$ ein Weg in S' , der p' und p'' verbindet.

ii) folgt sofort aus der Tatsache, daß alle Plaketten in W , die mit einer flachen Plakette in S' zusammenhängen, quasi-flach sind, zusammen mit der Forderung, daß S' keine isolierten Randlinks enthalten darf. ■

Definition 2.2:

Es sei S zulässige Zufallsfläche mit Wällen $W_1, \dots, W_n$. $\Delta(W_1)$ sei gemäß (2.13) definiert. Dann heißen $\Delta(W_1), \dots, \Delta(W_n)$ die S zugeordneten Standardwälle.

Man beachte, daß aufgrund von Lemma 2.5 und 2.7 $\Delta(W_1), \dots, \Delta(W_n)$ tatsächlich Standardwälle sind. Da $W_1, \dots, W_n$ paarweise kompatibel sind, sind auch $\Delta(W_1), \dots, \Delta(W_n)$ paarweise kompatibel. Wir haben somit jeder zulässigen Zufallsfläche S eine Menge paarweise kompatibler Standardwälle zugeordnet. Umgekehrt ist nun zu zeigen, daß es zu jeder Menge paarweise kompatibler Standardwälle genau eine zulässige Zufallsfläche S' gibt, der diese Standardwälle zugeordnet werden. Wir benötigen die folgende Begriffsbildung, die auch im Abschnitt 2.3 von Nutzen sein wird:

Es sei $\mathcal{W}$ eine Menge paarweise kompatibler Wälle. Unabhängig davon, ob $W \in \mathcal{W}$ innerer oder äußerer Wall ist, sei $P'(W) := P(W) \cap S_0$. Wir sagen $W \in \mathcal{W}$ wird von $W' \in \mathcal{W}$ eingeschlossen, wenn alle Plaketten in $P'(W)$ von $P'(W')$ eingeschlossen werden. Da dies insbesondere impliziert, daß $P'(W)$ nicht mit C zusammenhängt, kann ein äußerer Wall nie von einem Wall W' eingeschlossen werden.

Lemma 2.8:

Es sei $\{W_1, \dots, W_n\}$ eine Menge paarweise kompatibler Standardwälle, die nur äußere Wälle enthält. Dann gibt es eine zulässige Zufallsfläche S' , der die Standardwälle $W_1, \dots, W_n$ zugeordnet sind.

Beweis:

Es sei $P' = P'(W_1) \cup \dots \cup P'(W_n)$. Z sei Zusammenhangskomponente von $S \setminus \pi(W_i)$ für ein $i = 1, \dots, n$. Da W_i keinen der Wälle $W_1, \dots, W_n$ einschließt, ist Z dann auch eine Zusammenhangskomponente von $S_0 \setminus P'$. Wir setzen $T(Z) = t_{h_k}(Z)$, wobei h_k die Höhe derjenigen Randkurve C_k von W_i ist, für die $\pi(C_k) = \partial Z$ ist.

Für die verbleibenden Zusammenhangskomponenten von $S_0 \setminus P'$ setzen wir $T(Z) = Z$. Es seien nun $Z_1, \dots, Z_r$ sämtliche Zusammenhangskomponenten von $S_0 \setminus P'$. Wir definieren dann $F_i = T(Z_i)$, $F = F_1 \cup \dots \cup F_r$ und $S' = F \cup W_1 \cup \dots \cup W_n$ und gehen von hier an ebenso wie im Beweis von Lemma 2.7 vor, um zu zeigen, daß S' zulässige Zufallsfläche ist. ■

Wir definieren schließlich für einen Wall W den aufgefüllten Wall $\bar{W}$: Es seien $Z_1, \dots, Z_k$ die von einer Zusammenhangskomponente von $P'(W)$ eingeschlossenen Zusammenhangskomponenten von $S_0 \setminus \pi(W)$. Die inneren Randkurven $C_1, \dots, C_k$ von W seien so numeriert, daß $\pi(C_i) = \partial Z_i$ ist. Dann heißt

$$\bar{W} = W \cup t_{h(C_1)}(Z_1) \cup \dots \cup t_{h(C_k)}(Z_k)$$

der aufgefüllte Wall zu W . Mit diesem Begriff wird der Beweis des folgenden Lemmas sehr elegant:

Lemma 2.9:

$\{W, W_1, \dots, W_n\}$ sei eine Menge von paarweise kompatiblen Standardwällen. W sei innerer Wall und schließe keinen der Wälle $W_1, \dots, W_n$ ein. S sei eine zulässige Zufallsfläche, der die Standardwälle $W_1, \dots, W_n$

zugeordnet werden. Dann gibt es eine zulässige Zufallsfläche S' , der die Standardwälle $W, W_1 \dots W_n$ zugeordnet werden.

Beweis:

Es sei F die Menge der flachen Plaketten in S . Da W keinen der Wälle aus S einschließt, ist $P(\bar{W}) \subset \pi(F)$. Es sei $F' \subset F$ die Menge der Plaketten in S , die auf $P(\bar{W})$ projiziert werden und h die Höhe dieser Plaketten. Dann führt die Definition

$$S' = S \setminus F' \cup t_h(\bar{W})$$

zum Ziel. ■

Lemma 2.8 und 2.9 haben klarerweise zur Folge, daß es zu jeder Menge von paarweise kompatiblen Standardwällen eine zulässige Zufallsfläche S' gibt, der diese Standardwälle zugeordnet sind. Die Eindeutigkeit von S' folgt wieder aus der Tatsache, daß S' keine isolierten Randlinks hat. Wir fassen die Ergebnisse der Lemmas 2.5, 2.7, 2.8 und 2.9 im folgende Satz zusammen.

Satz 2.10:

- i) Es sei S zulässige Zufallsfläche, $W_1, \dots, W_n$ seien die S zugeordneten Standardwälle. Dann sind $W_1, \dots, W_n$ paarweise kompatibel.
- ii) Es sei $\{W_1, \dots, W_n\}$ eine Menge paarweise kompatibler Standardwälle. Dann gibt es genau eine zulässige Zufallsfläche S' , der die Standardwälle $W_1, \dots, W_n$ zugeordnet werden.

Anmerkung:

- vii) Um die Notation dieses Abschnitts nicht unnötig aufzublähen, habe ich mich auf $\nu = 3$ beschränkt. Es wurden jedoch keine speziellen Eigenschaften der drei-dimensionalen Theorie ausgenutzt. Deshalb

bleiben alle wichtigen Aussagen dieses Abschnitts, insbesondere Lemma 2.5, 2.7, 2.8 und 2.9 und somit Satz 2.10 für $\gamma = 4$ wahr. Für Zufallsflächen, die keine äußeren Wälle enthalten, ist dies in [Borgs, 1984] ausgeführt.

- viii) Der Begriff der zulässigen Zufallsfläche und damit der Begriff des Standardwalls bezog sich bisher stets auf einen vorgegebenen Wilson-loop $C = \partial S_0$. Ich werde die Menge der Standardwälle gemäß Definition 2.1 deshalb im folgenden häufig auch die Menge der Standardwälle über S_0 nennen.

2.3 Geladene Zufallsflächen

Im letzten Abschnitt habe ich gezeigt, daß man jeder zulässigen Zufallsfläche eine Menge von paarweise kompatiblen Standardwällen zuordnen kann, und daß diese Zuordnung bijektiv ist. Für abel'sche Gruppen folgt hieraus sofort eine Darstellung von

$$\tilde{Z}_q(S_0) := \tilde{W}_q(C) / z_{q,C}(S_0) \quad (2.16)$$

als Zustandssumme eines Polymersystems.

Ich möchte dies kurz erläutern. Es sei S eine zulässige Zufallsfläche und $z_{q,C}(S)$ die ihr zugeordnete Aktivität. Sowohl S als auch die Wälle in S werde ich in diesem Abschnitt als Mengen von positiv orientierten Plaketten ansehen. Statt $z_{q,C}(S)$ schreibe ich meist kurz $z_q(S)$. Die Orientierung der Plaketten $p \in S_0$ induziert in evidenten Weise eine Orientierung der horizontalen doppeltpunktfreien Kurven in $\mathcal{L}$. Man beachte, daß der Wilson-Loop C gemäß den Definitionen in 1.3 (Seite 22) negativ orientiert ist. Ebenso will ich die inneren Randkurven eines Walls in S negativ orientieren. Die äußeren Randkurven dagegen orientiere ich positiv.

Aufgrund der Normierung (1.26) ist der Koeffizient der trivialen Darstellung in der Fourierentwicklung⁹ von $\mathcal{G}_p$ gleich Null

⁹Da wir $\epsilon = \tau$ gesetzt haben, sind die Kopplungen J_p für alle Plaketten gleich. Deshalb hängen die Fourierkoeffizienten λ_q von $\mathcal{G}_p$ nicht von der gewählten Plakette p ab.

$$g_p(q_p) = \sum_{Q \neq \sigma} \lambda_Q \chi_Q(q_p) \quad (2.17)$$

Wie im einleitenden Abschnitt 2.1 erläutert, schreibt sich die Aktivität $z(S)$ als eine Summe über Ladungsverteilungen $Q: S \rightarrow \hat{G} \setminus \{0\}$ ¹⁰

$$z(S) = \sum_Q' \prod_{p \in S} \lambda_{Q(p)}$$

die der Ladungserhaltung

$$(d^*Q)(\ell) = \begin{cases} \mp q & \text{für } \pm \ell \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

genügen. Insbesondere ist $Q(p) = q$ auf allen flachen Plaketten. Es bezeichne F die Menge der flachen Plaketten in S , und $|F|$ die Zahl der Plaketten in F . δW sei für die äußeren Wälle wie im letzten Abschnitt gewählt und für innere Wälle sei $\delta W := \partial W$. Man beachte, daß für $\ell \in \delta W$ entweder $-\ell \in C$ ist oder ℓ ein gemeinsames Link einer Plakette $p_1 \in W$ und einer flachen Plakette $p_2 \in S$ ist (beides gleichzeitig kommt nach dem im letzten Abschnitt Gezeigten nicht vor).

Es seien $W_1, \dots, W_n$ die Wälle von S . Dann ist unter Ausnutzung des gerade Gesagten

$$z(S) = \lambda_q^{|F|} \prod_{i=1}^n \tilde{z}_0(W_i)$$

mit

$$\tilde{z}_0(W) = \sum_{Q: W \rightarrow \hat{G} \setminus \{0\}}' \prod_{p \in W} \lambda_{Q(p)}$$

wobei die Summe über Ladungsverteilungen Q geht, für die

¹⁰ $\hat{G}$ bezeichnet hier die duale Gruppe zu G und ist als additive Gruppe geschrieben.

$$(d^*Q)(\ell) = \begin{cases} \pm q & \text{für } \pm \ell \in \partial W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist (die Vorzeichen ergeben sich aus der gewählten Orientierung für die Randkurven von W). Mit

$$\tilde{z}(W) := \tilde{z}_0(W) \lambda_q^{-|p'(W)|}$$

ist also

$$z(S) = z(S_0) \prod_{i=1}^n \tilde{z}(W_i) \quad (2.18)$$

Da sich $\tilde{z}(W)$ unter Translationen senkrecht zu S_0 nicht ändert, faktorisiert $z(S)/z(S_0)$ in die Aktivitäten der S zugeordneten Standardwälle. Zusammen mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts ergibt sich eine Darstellung von $\tilde{z}_q(S_0)$ als Zustandssumme eines Polymersystems (als Polymere wähle man die Standardwälle über S_0).

Anmerkungen:

- i) Im allgemeinen konvergiert die Fourierreentwicklung einer quadratintegrablen Funktion über G nur im Sinne der L^2 -Norm. Ich will hier jedoch annehmen, daß die Wirkung so gewählt wurde, daß die Fourierreentwicklung von $\mathcal{G}_p$ absolut konvergiert (für die Wilson-Wirkung und reelle Kopplungskonstanten ist dies z.B. stets der Fall).
- ii) In der Definition von $\tilde{z}(W)$ wurde implizit vorausgesetzt, daß $\lambda_q \neq 0$ ist.
- iii) Schon in der Definition von $\tilde{W}_q(C)$ wurde implizit die absolute Konvergenz der Summe Σ' in (2.4) vorausgesetzt. Ich fasse dies mit i) zu der etwas schärferen Forderung

$$e^{-b} := \sum_{q \neq 0} d_q^2 |\lambda_q| < e^{-b_0} \quad (2.19)$$

mit b_0 gemäß Lemma 1.1 zusammen. (im abel'schen Fall ist d_Q für alle irreduziblen Darstellungen gleich eins).

Im nichtabel'schen Fall läßt sich die Aktivität eines Walles nicht mehr so definieren, daß (2.18) gültig bleibt. Wie in der Einleitung angedeutet, ist es zweckmäßig, an dieser Stelle den Begriff der geladenen Zufallsfläche einzuführen.

Definition 2.3:

Ein geordnetes Paar (S, Q) , bestehend aus einer zulässigen Zufallsfläche S und einer Abbildung Q von S in den Raum $\hat{G}$ der irreduziblen Darstellungen¹¹ von G heißt geladene Zufallsfläche, wenn $\forall p \in S \ Q(p) \neq 0$ ist. Eine Plakette $p \in S$ heißt angeregt, wenn $Q(p) \neq q$ ist oder wenn p Wall-Plakette ist. Es sei $\mathcal{A}$ die Menge der angeregten Plaketten in S , $A_1, \dots, A_n$ seien die π -Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{A}$ und für $i = 1, \dots, n$ sei Q_i die Einschränkung von Q auf A_i . Dann nenne ich $\alpha_1 = (A_1, Q_1), \dots, \alpha_n = (A_n, Q_n)$ die geladenen Anregungen in (S, Q) . A_i heißt der Träger von α_i , und $\pi(\alpha_i) := \pi(A_i)$ heißt der Schatten von α_i . Im übrigen seien die Definitionen aus Abschnitt 2.2 mutatis mutandis übernommen.

Wir gehen nun wie im letzten Abschnitt vor und ordnen jeder geladenen Zufallsfläche (S, Q) eine Menge von paarweise kompatiblen, geladenen Standardanregungen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zu. Diese Zuordnung ist wieder bijektiv und wir schreiben häufig $S = S(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $Q = Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Es bleibt das Problem der "Faktorisierung der Aktivitäten".

Ich definiere zunächst die Aktivität einer geladenen Zufallsfläche (S, Q)

¹¹ Ich will äquivalente irreduzible Darstellungen von G nicht unterscheiden. $\hat{G}$ ist also streng genommen eine Menge von Äquivalenzklassen.

$$\tilde{z}_q(S, Q) := \int W_q(C) \prod_{p \in S} g_{Q(p)}(g_p)$$

wobei

$$g_Q(\lambda) = d_Q \lambda_Q \chi_Q(\lambda)$$

ist und $\{\lambda_Q\}$ die Fourierkoeffizienten von g_p sind. Vermittels des Peter-Weyl-Theorem ist dann offenbar

$$\tilde{W}_q(C) = \sum_{(S, Q)} \tilde{z}_q(S, Q) \quad (2.20)$$

Man beachte, daß die rechte Seite aufgrund der Annahme (2.19) absolut konvergent.

Es sei nun $\alpha = (A, Q)$ eine geladene Anregung, $\bar{A}$ sei in Analogie zu $\bar{W}$ definiert, siehe (2.15), und $\delta \bar{A}$ bezeichne die Vereinigung der (positiv orientierten) äußeren Randkurven von A . Ich setze ¹² $\bar{Q}(p) = Q(p)$ für $p \in A$ und $\bar{Q}(p) = q$ für $p \in \bar{A}/A$. $\bar{\alpha}$ stehe für $(\bar{A}, \bar{Q})$, statt $\delta \bar{A}$ schreibe ich manchmal auch $\delta \bar{\alpha}$. Schließlich bezeichne $L(\bar{\alpha})$ die Menge der positiv orientierten Links ℓ , die zu mindestens einer Plakette $p \in \bar{A}$ gehören ¹³, und $L_0(\bar{\alpha})$ bezeichne die Menge der Links $\ell \in L(\bar{\alpha})$, für die weder ℓ noch $-\ell$ in $\delta \bar{\alpha}$ liegt. Ich definiere

$$g(\bar{\alpha}) := \prod_{p \in \bar{A}} g_{\bar{Q}(p)}(g_p) \quad \omega(\bar{\alpha}) := \int g(\bar{\alpha}) \prod_{\ell \in L_0(\bar{\alpha})} dg_\ell$$

Um die Aktivität einer geladenen Zufallsfläche (S, Q) mit geladenen Anregungen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zu berechnen, gehe ich induktiv vor: Ich wähle eine Anregung $\alpha_1(A_1, Q_1)$ aus, die keine der verbleibenden Anregungen einschließt (O.E.d.A. sei $\alpha_1 = \alpha_1$), und integriere die Linkvariablen für $\ell \in L_0(\bar{\alpha}_1)$ aus. Ich erhalte

$$\tilde{z}_q(S, Q) = \int W_q(C) \omega(\bar{\alpha}_1) \prod_{p \in S \setminus \bar{A}_1} g_{Q(p)}(g_p)$$

¹² $\bar{Q}$ steht hier nicht für die zu Q konjugierte Darstellung

¹³d.h. es gilt $\ell \in \partial p$ oder $-\ell \in \partial p$.

Das folgende Lemma 2.11 wird es uns dann ermöglichen, $\tilde{z}_q(S, Q)$ als Produkt einer geeignet definierten Aktivität $\tilde{z}_q(\alpha_1)$ und der Aktivität der Zufallsfläche (S', Q') zu schreiben, die nur die Anregungen $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ enthält.

Lemma 2.11:

$C_1, \dots, C_m$ seien die äußeren Randkurven von A. Dann ist

$$\omega(\tilde{\alpha}) = \sum_{q_1, \dots, q_m} \tilde{z}(\tilde{\alpha}, q_1, \dots, q_m) \prod_{i=1}^m d_{q_i} \chi_{q_i}(q_{C_i}) \quad (2.23)$$

mit Koeffizienten $\tilde{z}(\dots)$ in $\mathcal{C}$. Die Summe konvergiert in der L^2 -Norm bzgl. $dq_{\delta \tilde{\alpha}}$.

Beweis:

Wenn α innere Anregung ist, ist $\delta \tilde{\alpha}$ eine geschlossene, doppelpunkt-freie Kurve (nämlich die äußere Randkurve von α). Die Behauptung folgt dann sofort aus der Eichinvarianz von $\omega(\tilde{\alpha})$ und dem Peter-Weyl-Theorem.

Es sei also o.E.d.A. α äußere Anregung. $\delta \tilde{\alpha}$ ist dann eine Vereinigung von doppelpunktfreien geschlossenen Kurven in S_0 (jede äußere Randkurve hat Höhe Null) und jeder Punkt der Höhe Null gehört zu 0, 2 oder 4 Links in $\delta \tilde{\alpha}$. Es sei x ein Doppelpunkt in $\delta \tilde{\alpha}$, d.h. x gehöre zu vier Links in $\delta \tilde{\alpha}$. Aufgrund der Ergebnisse aus 2.2 (übertragen auf die Anregungen einer geladenen Zufallsfläche) ist x dann Eckpunkt von genau zwei Plaketten $p_1, p_2 \in \bar{A}$; p_1 und p_2 sind quasi-flach und berühren sich nur im Punkt x .

Ich führe das Hilfsgitter $\mathbb{L}_{1/3} = \frac{1}{3} \mathbb{L}$ ein. Die Plaketten und Links in $\mathbb{L}_{1/3}$ bezeichne ich mit $\dot{\ell}$ bzw. $\dot{p}$, die Eichfelder über $\mathbb{L}_{1/3}$ mit $\dot{h}$. Jede Plakette $p \in \mathbb{L}^{2+}$ enthält neun Plaketten $\dot{p} \in \mathbb{L}_{1/3}^{2+}$. Sofern $\dot{p}$ eine dieser Plaketten ist, schreibe ich $\dot{p} \subset p$. $\dot{\ell} \subset \ell$ ist analog definiert. $\bar{B}$ sei die Menge der Plaketten $\dot{p}$, für die es eine Plakette $p \in \bar{A}$ mit $\dot{p} \subset p$ gibt. Für $\dot{p} \subset p$ mit $p \in \bar{A}$ setze ich $Q(\dot{p}) = \bar{Q}(p)$ und

$$g_{\dot{p}} = d_{Q(\dot{p})} \chi_{Q(\dot{p})}(h_{\dot{p}}) \lambda_{Q(\dot{p})}^{n(\dot{p})}$$

wobei $n(\dot{p}) = 0$ ist, wenn $\dot{p}$ mit ∂p zusammenhängt, und $n(\dot{p}) = 1$ ist, wenn

$\dot{\omega}$ die mittlere der neun Plaketten in p ist. Schließlich definiere ich

$$\dot{\omega}(\vec{\omega}) = \int_{\vec{p} \in \vec{B}} \prod_{i \in L_0(\vec{B})} p_i \, dh_i$$

Mit Hilfe des Peter-Weyl-Theorems (siehe Anhang D; man verwende Gleichung (D.4) errechnet man, daß

$$(\dot{\omega}(\vec{\omega}))(\vec{h}) = (\omega(\vec{\omega}))(\vec{g})$$

ist, sofern für $\vec{h} \in \delta \vec{\omega}$

$$g_{\vec{h}} = \prod_{i \in \vec{L}} h_i$$

gewählt wurde (das Produkt sei längs $\vec{L}$ geordnet). Es genügt also, Lemma 2.11 für $\dot{\omega}(\vec{\omega})$ zu beweisen.

Auf den ersten Blick scheint dies keinerlei Vorteile zu bringen. Denn $\delta \vec{B}$ besitzt dieselben Doppelpunkte wie $\delta \vec{A}$. Dieser "erste Blick" täuscht jedoch. Es gehe nämlich $\vec{B}^{(0)}$ bzw. $\vec{A}^{(0)}$ aus $\vec{B}$ bzw. $\vec{A}$ durch Weglassen aller Plaketten hervor, die einen der Doppelpunkte von $\delta \vec{A}$ als Eckpunkt enthalten. Während $\delta \vec{A}^{(0)}$ möglicherweise neue Doppelpunkte enthält (siehe Abb. 2.4¹⁴) ist $\delta \vec{B}^{(0)}$ stets doppelpunktfrei.

Um dies zu beweisen, betrachte man die Zusammenhangskomponenten $P_1 \dots P_m$ von $P'(\vec{B})$. $P_i^{(0)}$ gehe aus P_i durch Weglassen aller Plaketten $\vec{p} \in \mathbb{Z}_{1/3}^{2+}$ hervor, die einen Doppelpunkt von $\delta \vec{B}$ als Eckpunkt enthalten. Dann ist $P'(\vec{B}^{(0)}) = P_1^{(0)} \vee \dots \vee P_m^{(0)}$; und klarerweise hängen $\partial P_i^{(0)}$ und $\partial P_j^{(0)}$ für $i \neq j$ nicht zusammen. Zu zeigen bleibt also nur, daß $\partial P_i^{(0)}$ für $i = 1, \dots, m$ doppelpunktfrei ist. Nun ist $P_i^{(0)}$ einerseits offensichtlich zusammenhängend, und andererseits schließt mit P_i auch $P_i^{(0)}$ keine Plaketten der Höhe Null ein (denn alle Plaketten in P_i hängen mit ∂P_i zusammen). Mit Lemma 2.1 folgt dann, daß $\partial P_i^{(0)}$ doppelpunktfrei ist.

¹⁴Tatsächlich kommt der in Abb. 2.4 betrachtete Fall, daß alle Plaketten in $\vec{A}$ die Höhe Null haben, gar nicht vor. Denn jede Anregung mit nicht verschwindender Aktivität enthält mindestens eine Wall-Plakette. Da jedoch alle Plaketten in $\vec{A} \setminus \vec{A}^{(0)}$ und alle Plaketten in $\vec{B} \setminus \vec{B}^{(0)}$ die Höhe Null haben ($\delta \vec{\omega}$ hat Höhe Null!), gibt schon dieses einfache Beispiel die wesentlichen Züge des allgemeinen Falls wieder.

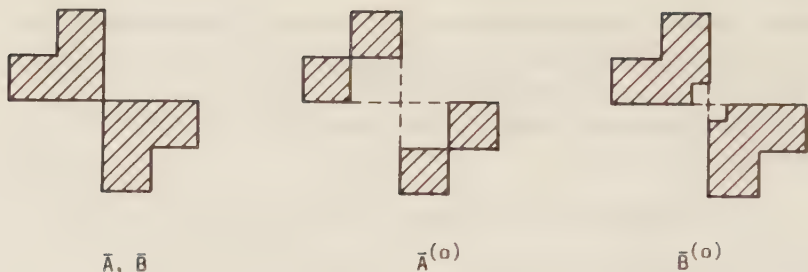


Abb. 2.4: Die Mengen $\bar{A}^{(0)}$ und $\bar{B}^{(0)}$ für den Fall, daß alle Plaketten in $\bar{A}$ die Höhe Null haben

Es sei nun

$$\dot{\omega}_0(\vec{\alpha}) = \int \prod_{\dot{p} \in \bar{B}^{(0)}} g_{\dot{p}} \prod_{\dot{\ell} \in L_0(\bar{B}^{(0)})} dh_{\dot{\ell}}$$

Dann ist

$$\dot{\omega}(\vec{\alpha}) = \int \dot{\omega}_0(\vec{\alpha}) \prod_{\dot{p} \in R} g_{\dot{p}} \prod_{\dot{\ell} \in L_R} dh_{\dot{\ell}} \quad (2.24)$$

wobei $R = \bar{B} \setminus \bar{B}^{(0)}$ die Menge der Plaketten in $\bar{B}$ ist, die einen Doppelpunkt von $\delta \bar{B}$ als Eckpunkt enthalten. L_R besteht aus allen Links $\dot{\ell}$, die sowohl zu einer Plakette in R als auch zu einer Plakette in $\bar{B}^{(0)}$ gehören.

Da $\dot{\omega}_0(\vec{\alpha})$ eichinvariant und $\delta \bar{B}^{(0)}$ doppelpunktfrei ist, ist offenbar

$$\dot{\omega}_0(\vec{\alpha}) = \sum_{q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Z}} z(\vec{\alpha}, q_1, \dots, q_m) \prod_{i=1}^m dq_i \chi_{q_i}(h_{\partial P_i^{(0)}})$$

mit geeigneten Koeffizienten $z(\dots)$ in $\mathbb{C}$. Einsetzen in (2.24) und Anwenden des Peter-Weyl-Theorems ergibt (2.23) mit $\tilde{z}(\vec{\alpha}, q_1, \dots, q_m) = z(\vec{\alpha}, q_1, \dots, q_m)$, falls für $i = 1, \dots, m$ und alle Plaketten $\dot{p} \in R$, die mit $\partial P_1^{(0)}$ zusammenhängen $Q(\dot{p}) = q_i$ ist, und $z(\vec{\alpha}, q_1, \dots, q_m) = 0$, falls dies nicht der Fall ist (man beachte, daß für alle $\dot{p} \in R$ $n(\dot{p}) = 0$ ist).

Ich setze nun für eine geladene Anregung $\alpha = (A, Q)$ mit äußeren Randkurven $C_1, \dots, C_m$

$$\tilde{z}_q^{(0)}(\bar{\alpha}) = d_q^{-m} \int_{\rho(\bar{\alpha})} \prod_{i=1}^m \overline{\chi_q(q_{C_i})} \prod_{\ell \in L(\bar{\alpha})} dq_\ell \quad (2.25)$$

$$\tilde{z}_q(\alpha) = \tilde{z}_q^{(0)}(\bar{\alpha}) \lambda_q^{-|P'(\bar{A})|} \quad (2.26)$$

(Man beachte, daß aufgrund des Peter-Weyl Theorems $\tilde{z}(\bar{\alpha}, q, \dots, q) = \tilde{z}_q^{(0)}(\bar{\alpha})$ ist). Vermittels Lemma 2.11. gilt nun

Lemma 2.12:

$\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ sei eine Menge von paarweise kompatiblen, geladenen Standardanregungen, α_1 schließe keine der Anregungen $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ ein. (S, Q) bzw. (S', Q') seien die geladenen Zufallsflächen, denen die geladenen Standardanregungen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ resp. $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ zugeordnet werden. Dann gilt:

- i) $\tilde{z}_q(S, Q) = \tilde{z}_q(\alpha_1) \tilde{z}_q(S', Q')$
- ii) $\tilde{z}_q(S, Q) = z_q(S_0) \prod_{i=1}^n \tilde{z}_q(\alpha_i)$

Beweis:

Es sei F' die Menge der Plaketten $p' \in S'$ für die $\pi(p') \in P'(\bar{\alpha}_1)$ ist. Da α_1 mit allen Anregungen in (S', Q') kompatibel ist und keine von ihnen einschließt, ist F' eine Menge von nicht angeregten Plaketten in (S', Q') . α_1 ist eine (S, Q) zugeordnete, geladene Standardanregung. Also gibt es eine geladene Anregung α in (S, Q) , die zu α_1 äquivalent ist. Offenbar geht S aus S' durch Ersetzen von F' durch A hervor, wobei A der Träger von α ist; und mit

$$\varphi_0 := W_q(C) \prod_{p \in S' \setminus F'} \varphi_{Q(p)}(g_p)$$

$$\varphi(F') := \prod_{p \in F'} \varphi_p(g_p)$$

schreiben sich

$$\tilde{z}_q(S', Q') = \int \varphi_0 \varphi(F') d g_{\mathbb{L}}$$

$$\tilde{z}_q(S, Q) = \int \varphi_0 \varphi(\bar{\alpha}) d g_{\mathbb{L}}$$

Es seien $F'_1, \dots, F'_n$ die Zusammenhangskomponenten von F' . Man beachte, daß $\partial F' = \partial \bar{\alpha}$ ist und daß $C_1 = \partial F'_1, \dots, C_m = \partial F'_m$ die äußeren Randkurven von α sind. Mit Hilfe des Peter-Weyl-Theorems errechnet man

$$\begin{aligned} \omega(F') &= \int \varphi(F') \prod_{\ell \in L_0(F')} d g_{\ell} \\ &= \lambda_q^{|F'|} \prod_{i=1}^m d g \chi_q(g_{C_i}) \end{aligned}$$

und erhält

$$\tilde{z}_q(S', Q') = d_q^m \lambda_q^{|F'|} \int \varphi_0 \prod_{i=1}^m \chi_q(g_{C_i}) d g_{\mathbb{L}}$$

Zur Berechnung von $z(S, Q)$ verwende man Lemma 2.11. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{z}_q(S, Q) &= d_q^m \tilde{z}(\bar{\alpha}, q, \dots, q) \int \varphi_0 \prod_{i=1}^m \chi_q(g_{C_i}) d g_{\mathbb{L}} \\ &= \tilde{z}(\bar{\alpha}, q, \dots, q) \lambda_q^{-|F'|} \tilde{z}(S', Q') \\ &= \tilde{z}(\bar{\alpha}, q, \dots, q) \lambda_q^{-|P'(\bar{A})|} \tilde{z}(S', Q') \end{aligned}$$

Da (wieder mittels des Peter-Weyl-Theorems) $\tilde{z}_q^{(0)}(\bar{\alpha}) = \tilde{z}(\bar{\alpha}, q, \dots, q)$ ist, und da $\tilde{z}_q(\alpha)$ invariant unter Translationen senkrecht zu S_0 ist, ist i) damit bewiesen.

ii) folgt aus i) per Induktion. ■

Mit Lemma 2.12 ii) schreibt sich $\tilde{z}_q(S_0)$ klarerweise als Zustandssumme eines Polymersystems (man wähle die geladenen Standardanregungen als Polymere):

$$\tilde{z}_q(S_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}} \prod_{i=1}^n \tilde{z}_q(\alpha_i) \quad (2.27)$$

Es erweist sich jedoch als praktischer, Polymere als Teilmengen von $\tilde{S}_0$ zu definieren, siehe unten. Zuvor möchte ich jedoch einige Anmerkungen machen.

Anmerkungen:

- iv) Ebenso wie in den Begriff des Standardwalls geht die Fläche S_0 auch implizit in den Begriff der geladenen Standardanregungen ein. Wir werden deshalb häufig von geladenen Standardanregungen über S_0 sprechen.
- v) Es sei $\alpha = (A, Q)$ eine geladene Standardanregung mit inneren Randkurven $C_1, \dots, C_n$ und äußeren Randkurven $C_{n+1}, \dots, C_{n+m}$. Dann ist

$$\tilde{z}_q(\alpha) = \lambda_q^{-|P'(A)|} d_q^{n-m} \int \prod_{p \in A} S_{Q(p)}(q_p) \prod_{i=1}^{n+m} \overline{\chi_q(q_{C_i})}$$

Beweis:

Es sei Z_i diejenige Zusammenhangskomponente von $S_0 \setminus \pi(A)$, deren Rand gleich $\pi(C_i)$ ist, h_i sei die Höhe von C_i und F_i sei gleich $t_h(Z_i)$.

Unter Verwendung von (2.25) und (2.26) schreibt sich $\tilde{Z}_q(\alpha)$ als

$$\lambda_q^{-|P'(\tilde{A})|} d_q^{-m} \int \mathcal{P}(\alpha) \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(F_i) \prod_{i=1}^m \overline{\chi_q(q_{c_{n+i}})} dq_{\perp}$$

mit

$$\mathcal{P}(\alpha) = \prod_{p \in A} \mathcal{P}_Q(p)(q_p) \quad \mathcal{P}(F_i) = \prod_{p \in F_i} \mathcal{P}_q(q_p)$$

Vermittels des Peter-Weyl-Theorems ist

$$\begin{aligned} \int \mathcal{P}(F_i) \prod_{p \in L_o(F_i)} dq_p &= \lambda_q^{|F_i|} d_q \chi_q(q_{\partial F_i}) \\ &= \lambda_q^{|F_i|} d_q \overline{\chi_q(q_{c_i})} \end{aligned}$$

wobei wir benützt haben, daß C_i und ∂F_i entgegengesetzt orientiert sind. Hieraus, und aus der Beobachtung, daß $|P'(\tilde{A})| = |P'(A)| + |F_1| + \dots + |F_n|$ ist, folgt die Behauptung. ■

Um $\tilde{Z}_q(S_0)$ als Zustandssumme eines Polymersystems von Polymeren in S_0 darzustellen, benötige ich die folgende Notation: Es seien $C_1, \dots, C_4$ die vier geraden Teilstücke von C , $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_4 \subset \tilde{S}_\infty$ seien gemäß Abb. 2.5 gewählt. Für eine geladene Anregung $\alpha = (A, Q)$ gehe $\tilde{\chi}_1(\alpha)$ aus $\pi(\alpha)$ durch Projektion der Links und Plaketten aus $\tilde{S}_1 \cap \pi(\alpha)$

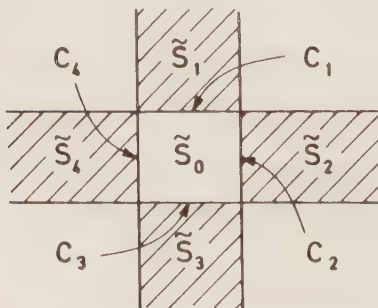


Abb. 2.5:

Die Mengen $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_4$

auf C_i hervor. $\mathcal{L}_i(\alpha)$ sei die Menge der Links in $\tilde{\mathcal{L}}_i(\alpha)$,
 $\mathcal{L}(\alpha) := \mathcal{L}_1(\alpha) \cup \dots \cup \mathcal{L}_q(\alpha)$ und schließlich sei $\gamma(\alpha) :=$
 $= \pi'(\alpha) \cup \mathcal{L}(\alpha)$. Man beachte, daß mit $\pi(\alpha)$ auch $\gamma(\alpha)$ eine zusammen-
hängende Menge ist.

Definition 2.4:

Eine zusammenhängende, nicht leere Menge $\gamma \subset \tilde{S}_0$ heißt Polymer in $\tilde{S}_0$. Zwei Polymere γ, γ' in $\tilde{S}_0$, die nicht miteinander zusammenhängen heißen kompatibel. Ich definiere die Aktivität eines Polymers in $\tilde{S}_0$ durch

$$\tilde{z}_{q, S_0}(\gamma) = \sum_{\mathcal{A}} \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \tilde{z}_q(\alpha) \quad (2.28)$$

wobei die Summe über Mengen von paarweise kompatiblen, geladenen Standardanregungen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\gamma(\alpha_1) \cup \dots \cup \gamma(\alpha_n) = \gamma$ geht. Ich sage: eine Menge $\gamma \subset \tilde{S}_0$ ist Polymer in $\tilde{S}_0$, wenn γ endlich, nicht leer, und zusammenhängend ist. Sofern $\gamma \notin \tilde{S}_0$ ist, setze ich $\tilde{z}_{q, S_0}(\gamma) = 0$.

Offenbar ergibt Definition 2.4 die gewünschte Darstellung von $\tilde{z}_q(S_0)$ als Zustandssumme eines Polymersystems mit Polymeren in $\tilde{S}_0$

$$\tilde{z}_q(S_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}^c \prod_{i=1}^n \tilde{z}_{q, S_0}(\gamma_i) \quad (2.29)$$

Man beachte, daß (2.27) aufgrund der Annahme (2.19) absolut konvergiert. Folglich ist zum einen (2.28) für ein beliebiges Polymer γ in $\tilde{S}_0$ wohldefiniert und zum anderen ist auch (2.29) absolut konvergent¹⁵ (immer natürlich $\lambda_q \neq 0$ vorausgesetzt).

¹⁵ Da (2.29) für jedes endliche S_0 eine endliche Summe ist, ist nur die erste Aussage nicht trivial.

Anmerkungen:

- vi) Für innere Anregungen $\alpha = (A, Q)$ ist klarerweise $P'(A)$ nicht leer. Dasselbe gilt für äußere Anregungen gemäß Bemerkung iv) aus Abschnitt 2.2 (verallgemeinert von Wällen auf Anregungen). Es folgt, daß jedes Polymer in $\tilde{S}_0$ mit nicht verschwindender Aktivität mindestens eine Plakette enthält.
- vii) Da alle Standardanregungen die Höhe Null haben, ist für innere Anregungen $\alpha = (A, Q)$ offensichtlich $A \cup \gamma(\alpha)$ eine zusammenhängende Menge. Für äußere Anregungen hängen alle Zusammenhangskomponenten von A mit C und damit mit $\gamma(\alpha)$ zusammen (siehe Lemma 2.6 ii)). $A \cup \gamma(\alpha)$ ist also stets eine zusammenhängende Menge.

2.4 Die Konvergenz der Clusterentwicklung für $\log \tilde{W}_q(C)$

Um die Konvergenz der Mayer-Entwicklung

$$\log \tilde{Z}_q(S_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\Phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n \tilde{z}_{q, S_0}(\gamma_i) \quad (2.30)$$

für das Polymersystem gemäß Definition 2.4 zu kontrollieren, führe ich die folgenden Größen k_0 , k_1 und k_2 ein ($\lambda_q \neq 0$ ist stets vorausgesetzt)

$$k_0 = \sum_{Q \neq \sigma} d_Q^2 |\lambda_Q| \quad (2.31)$$

$$k_1 = \sum_{Q \neq q}^* d_Q^2 |\lambda_Q / \lambda_q| \quad (2.32)$$

$$k_2 = \sum_{Q \neq \sigma} d_Q^2 |\lambda_Q / \lambda_q| \quad (2.33)$$

wobei die Summe $\sum^*$ über diejenigen Darstellungen $Q \neq q$ geht, die dieselbe Zentrumsdarstellung wie q induzieren.

Lemma 2.13:

Es sei $k_0 < 1$ und $k = d_q^2 \max \{k_1, k_0^{1/3} \cdot k_2^{2/3}\} < \infty$.

Dann gilt für jede endliche Menge A von Plaketten

$$\sum_{\alpha} |\tilde{Z}_q(\alpha)| \leq k^{|A|} \quad (2.34)$$

wobei die Summe über alle geladenen Standardanregungen über $\tilde{S}_0$ mit Träger A geht.

Beweis:

1) Es sei $\alpha = (A, Q)$ eine geladene Standardanregung mit nicht verschwindender Aktivität und p eine flache Plakette in A . Dann ist einerseits

$Q(p) \neq q$ (sonst wäre p nicht angeregt) und andererseits ist die von $Q(p)$ induzierte Zentrumsdarstellung gleich der von q induzierten Zentrumsdarstellung (vgl. Lemma 1.7).

2) Es sei A_0 die Menge der flachen Plaketten in A und A_1 die Menge der quasi-flachen Plaketten in $A \setminus A_0$. A_2 bestehe aus allen Plaketten $p \in A$, für die $\pi(p) \notin \tilde{S}_0$ ist und A_3 bestehe aus den horizontalen Wall-Plaketten in $A \setminus (A_1 \cup A_2)$. Schließlich sei $A_4 := A \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_3)$. Dann ist offensichtlich $|P'(A)| = |P'(A_3)| + |A_0| + |A_1|$ und $2|P'(A_3)| < |A_3|$. Unter Verwendung von 1) und von Bemerkung v) aus dem letzten Abschnitt gilt offenbar

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \left| \tilde{z}_q(\alpha) \right| &\leq \\ &\leq d_q^{2n} |\lambda_q|^{-|P'(A_3)|} k_1^{|A_0|} k_2^{|A_1|} k_0^{|A_2| + |A_3| + |A_4|} \\ &\leq d_q^{2n} k_2^{|A_1| + \frac{1}{2}|A_3|} k_1^{|A_0|} k_0^{|A_2| + |A_4| + \frac{1}{2}|A_3|} \end{aligned}$$

wobei ich im letzten Schritt ausgenutzt habe, daß $k_2 = |\lambda_q|^{-1} k_0 \geq 1$ und $k_0 \leq 1$ ist. n ist die Zahl der inneren Randkurven in A .

3. Beh: $|A_1| \leq 2|A_2 \cup A_4|$

Ich betrachte eine geladene Standardanregung α mit Träger A und die zugeordnete geladene Zufallsfläche (S, Q) . A_1' sei die Menge der Plaketten $p \in A_1$ für die $\pi(p)$ mit der Projektion einer Plakette aus A_2 zusammenhängt. Offensichtlich ist $|A_1'| \leq |A_2|$. Ich zeige nun, daß $|A_1 \setminus A_1'| \leq 2|A_4|$ ist. Es sei $p \in A_1 \setminus A_1'$. p ist quasi-flach, aber nicht flach. Also $\exists p' \in A_2 \cup A_3 \cup A_4$, so daß $\pi(p')$ und $\pi(p)$ zusammenhängen. Da $p \notin A_1'$ ist, ist $p' \notin A_2$. Es sei $p' \in A_3$. Aus der Tatsache, daß S keine isolierten Randlinks besitzt, folgert man dann, daß es eine Plakette $p'' \in A$ geben muß, die auf das gemeinsame Link von $\pi(p)$ und $\pi(p')$ projiziert wird. Da $p'' \in A_4$ ist, hängt $\pi(p)$ somit für $p \in A_1 \setminus A_1'$ stets mit der Projektion einer

Plakette $p'' \in A_4$ zusammen. Jedes Link in $\pi(A_4)$ hängt mit nicht mehr als zwei Plaketten in $\pi(A_1)$ zusammen. Also ist $|A_1 \setminus A_1| \leq 2|A_4|$.

4) Vermittels 3) ist

$$|A_2| + |A_4| = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) (|A_2| + |A_4|) \geq \\ \geq \frac{1}{3} (|A_2| + |A_4| + |A_1|)$$

sowie

$$|A_1| \leq \frac{2}{3} |A_1| + \frac{2}{3} (|A_2| + |A_4|)$$

Somit ergibt sich

$$\sum_{\alpha} |\tilde{z}_q(\alpha)| \leq d_q^{2n} k_1^{|A_0|} (k_2^{2/3} k_0^{1/3})^{|A \setminus A_0|}$$

Lemma 2.13 folgt dann sofort aus der Tatsache, daß $n \leq |A|$ ist. ■

Definition 2.5:

Ich sage eine irreduzible Darstellung q von G erfüllt die Bedingung B wenn gilt

- i) die von q induzierte Zentrumsdarstellung q' ist verschieden von der trivialen
- ii) Entweder ist $\chi_q = \overline{\chi_q}$ oder die von q induzierte Zentrumsdarstellung ist verschieden von der von $\bar{q}$ induzierten Zentrumsdarstellung.

Bemerkung:

i) Für die fundamentale Darstellung von $U(N)$ oder $SU(N)$ und für alle nicht-trivialen Darstellungen einer beliebigen abel'schen

Gruppe G ist die Bedingung B erfüllt. Für $SU(2)$ und für alle $SU(N)$ mit ungeraden N folgt ii) aus der Annahme i). Insbesondere erfüllen alle nicht-ganzzahligen Darstellungen von $SU(2)$ und alle Darstellungen mit nicht-trivialer Trivialität von $SU(3)$ die Bedingung B.

Lemma 2.14:

Es sei $k(J)$ die Funktion aus Lemma 2.13. Im Wilson-Loop und in der Wirkung sei dieselbe Darstellung q verwendet und diese erfülle die Bedingung B. Dann gibt es eine Konstante $J_1 > 0$, so daß gilt

- i) $k(J)$ ist für $|J| < J_1$ endlich und geht für $J \rightarrow 0$ gegen Null.
- ii) Für eine beliebige Standardanregung α ist $\tilde{z}_q(\alpha)$ analytisch im Gebiet $\mathcal{G}_1 = \{J \in \mathbb{C} : k(J) < \infty\}$.
- iii) $k(\cdot)$ ist stetig an jeder Stelle $J \in \mathcal{G}_1$.

Beweis:

- i) Ich schreibe λ_q als m_q/m_0 mit

$$m_q(J) = d_q^{-1} \int \overline{\chi_q(q)} e^{J \operatorname{Re} \chi_q(q)} dq \quad (2.35)$$

und setze

$$K(J) = \frac{1}{|J|} \sum_{q \neq 0} d_q^2 |m_q(J)|$$

Man überzeugt sich leicht (z.B. durch Entwickeln der Exponentialfunktion), daß die Potenzreihenentwicklung von $m_q(J)$ um $J=0$ nur positive Koeffizienten enthält. Also ist insbesondere $|m_q(J)| \leq m_q(|J|)$. Unter Verwendung von Satz D.5 erhält man die obere Schranke

$$K(J) \leq \frac{1}{|J|} \sum_{q \neq 0} d_q^2 m_q(|J|) = \frac{e^{|J| \chi_q(1)} - m_0(|J|)}{|J|}$$

Da $m_0(0) = 1$ ist, ist also $\forall J \in \mathbb{C} \quad K(J) < \infty$. Hieraus folgt aber sofort die Endlichkeit von k_0 , k_1 und k_2 (und somit die Endlichkeit von k), sofern J keine Nullstelle von $m_0(J)$ oder $m_q(J)/J$ ist. Da beide Funktionen stetig und für $J=0$ nicht gleich Null sind, ergibt sich die Existenz einer Konstanten $J_1 > 0$, so daß $k(J)$ für $|J| < J_1$ endlich ist.

Es bleibt zu zeigen, daß $k(J)$ für $J \rightarrow 0$ gegen Null geht. Da

$$k_2(J) = \left| \frac{J}{m_q(J)} \right| K(J) \quad (2.36)$$

für $J \rightarrow 0$ beschränkt bleibt und $k_0 = |m_q/m_0| k_2$ gegen Null geht, genügt es zu zeigen, daß $k_1(J)$ für $J \rightarrow 0$ gegen Null geht. Ich betrachte zunächst den Fall, daß χ_q und $\bar{\chi}_q$ nicht identisch sind. Die rechte Seite von (2.32) enthält dann weder die triviale Darstellung $Q=0$, noch die Darstellungen q und $\bar{q}$ (man verwende die Bedingung B). Somit ist

$$\begin{aligned} k_1 &\leq |m_q(J)|^{-1} \sum_{Q \neq \{0, q, \bar{q}\}} d_Q^2 m_Q(|J|) \\ &= |m_q(J)|^{-1} \left\{ e^{iJ} \chi_q(1) - m_0(|J|) - 2 d_q^2 m_q(|J|) \right\} \end{aligned}$$

wobei ich ausgenützt habe, daß $m_q(J) = m_{\bar{q}}(J)$ ist. Für $|J| \rightarrow 0$ ist

$$m_0(|J|) = 1 + O(|J|^2)$$

$$m_q(|J|) = \frac{|J|}{2d_q} + O(|J|^2)$$

Also geht k_1 für $|J| \rightarrow 0$ gegen Null. Sofern $\chi_q = \bar{\chi}_q$ ist, ist der Term

$$-2d_q^2 m_q(|J|) \quad \text{durch} \quad -d_q^2 m_q(|J|)$$

zu ersetzen. Andererseits ist aber nun

$$m_q(|J|) = \frac{|J|}{d_q} + O(|J|^2)$$

und es geht wieder $k_1(J)$ mit $J \rightarrow 0$ gegen Null.

ii) Für $J \in \mathcal{G}_1$ ist $|\tilde{z}_q(\alpha)| < \infty$ (man verwende Lemma 2.13). Da sich $\tilde{z}_q(\alpha)$ als Quotient zweier in ganz $\mathcal{C}$ analytischer Funktionen schreiben läßt, folgt die Behauptung.

iii) Offenbar sind sowohl $K(J)$ als auch $|m_Q(J)/J|$ in ganz $\mathcal{C}$ stetig. Gemäß (2.36) läßt sich k_2 also als Quotient zweier in $\mathcal{C}$ stetiger Funktionen schreiben. Dasselbe gilt für k_0 und k_1 . Es folgt, daß k_1 und $k_0^{1/3} k_2^{2/3}$ genau dann stetig an der Stelle $J \in \mathcal{C}$ sind, wenn $k_1(J)$ resp. $(k_0^{1/3} k_2^{2/3})(J) < \infty$ sind. Hieraus, und aus der Definition von k , schließt man sofort auf die Behauptung iii). ■

Bemerkung:

ii) Es sei $\mathcal{N}$ die Menge der Nullstellen von $f(J) = m_0(J) m_Q(J)/J$. Da f eine ganze Funktion ist, die nicht identisch Null ist, kann es keinen Häufungspunkt von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{C}$ geben. Da andererseits im obigen Beweis gezeigt wurde, daß $\mathcal{C} \setminus \mathcal{N} \subset \mathcal{G}_1$ ist, folgt, daß $\mathcal{G}_1$ tatsächlich ein Gebiet ist.

Es bezeichne Γ_∞ die Menge der Polymere in $\tilde{S}_\infty$. Dann gibt es eine Konstante K_0 (vgl. Lemma C.1), so daß die Zahl der Polymere $\gamma' \in \Gamma_\infty$ mit vorgegebener Größe s die mit einem festen Polymer $\gamma \in \Gamma_\infty$ inkompatibel sind, durch $|\gamma| \times K_0^s$ beschränkt ist. Es sei $b_0 = \log 2eK_0$ und

$$Q(b) := \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{d!} \sup_{\gamma \in \Gamma_\infty} |\gamma|^{-1} \sum_{\substack{\gamma' \in \Gamma_\infty \\ \gamma' \neq \gamma}} |\gamma'|^d e^{-b|\gamma'|} \quad (2.37)$$

Dann ist offensichtlich für $b > b_0$ $Q(b) < 1$.

Satz 2.15:

In der Wirkung und im Wilson-Loop sei dieselbe Darstellung q verwendet und diese erfülle die Bedingung B. Dann gibt es eine Konstante $J_0 > 0$ und eine für $0 < |J| < J_0$ definierte stetige Funktion $b(J)$, so daß gilt:

- i) $\forall \gamma \in \Gamma_\omega$ und für $|J| < J_0$ ist $\tilde{z}_{q, S_0}(\gamma)$ wohldefiniert und als Funktion von J analytisch
- ii) Für $|J| < J_0$ ist $b(J) > b_0$ und $\forall \gamma \in \Gamma_\omega$ gilt

$$|\tilde{z}_{q, S_0}(\gamma)| \leq e^{-b(J)|\gamma|} \quad (2.38)$$

Insbesondere ist die Clusterentwicklung (2.30) für $|J| < J_0$ absolut konvergent.

- iii) $b(J)$ geht für $J \rightarrow 0$ gegen ∞ .

Beweis:

Es gehe $k_{q, S_0}(\gamma)$ aus der rechten Seite von (2.28) durch Ersetzen von $\tilde{z}_q(\alpha)$ durch $|\tilde{z}_q(\alpha)|$ hervor. Unter Verwendung von Bem. vii) aus 2.3 und von Lemma 2.13 erhält man

$$|\tilde{z}_{q, S_0}(\gamma)| \leq k_{q, S_0}(\gamma) \leq \sum'_{A: |A| \geq |\gamma|} k^{|A|}$$

wobei die Summe $\sum'$ über Mengen A von Plaketten in $\mathcal{L}$ geht, für die $A \cup \gamma$ eine zusammenhängende Menge ist. Es ist nun eine einfache kombinatorische Übung, die Zahl der Mengen A von Plaketten in $\mathcal{L}$, für die $|A| = s$ ist und $A \cup \gamma$ eine zusammenhängende Menge ist, durch $K_1^{s+|\gamma|}$ abzuschätzen, mit einer nur von der (hier festgehaltenen) Dimension abhängigen Konstante K_1 .

Es sei nun $\mathcal{G}_2$ die Menge aller $J \in \mathbb{C}$, für die $kK_1 < 1$ ist. Dann ist für $J \in \mathcal{G}_2$

$$k_{q, s_0}(J) \leq K_1^{|J|} \sum_{n \geq |J|} (kK_1)^n = \frac{(kK_1^2)^{|J|}}{1 - kK_1}$$

Da $k(\cdot)$ in $\mathcal{G}_2$ stetig ist, ist $k_{q, s_0}(J)$ in jedem kompakten Teilgebiet K von $\mathcal{G}_2$ beschränkt. Nach dem Satz von Montel (siehe z.B. [Behnke, Sommer, 1962]) ist dann (2.28) in K gleichmäßig konvergent. Die endlichen Teilsommen von (2.28) sind nach Lemma 2.14 in $\mathcal{G}_2$ analytisch. Also ist $\tilde{z}_{q, s_0}(J)$ in $\mathcal{G}_2$ analytisch.

Das weitere Vorgehen ist offensichtlich: man setze

$$e^{-b(J)} = \frac{k(J) K_1^2}{1 - k(J) K_1}$$

und wähle für J_0 die größte Konstante $J_0 > 0$, so daß $b(J)$ für $|J| < J_0$ größer als b_0 ist. ■

Anmerkung

iii) Es seien $b(J)$ und $\mathcal{G}_2$ wie im obigen Beweis gewählt, und $\mathcal{G}_0$ sei die Menge aller $J \in \mathcal{G}_2$, für die $b(J) > b_0$ ist. Dann bleiben die Aussagen des Satzes 2.15 offenbr für alle $J \in \mathcal{G}_0$ richtig. J_0 ist der Radius des größten Kreises um Null, dessen Inneres in $\mathcal{G}_0$ enthalten ist.

Ich möchte schließlich den Limes $S_0 \rightarrow S_\infty$ diskutieren. Es sei $\Sigma(t, \ell)$ die Menge der Punkte x mit Höhe Null, für die gilt

$$-\frac{t+1}{2} < x_0 \leq \frac{t+1}{2} \quad - \quad \frac{\ell+1}{2} < x_1 \leq \frac{\ell+1}{2}$$

$S_0(t, \ell)$ sei die Menge der positiv orientierten Plaketten in $\Sigma(t, \ell)$ und $C_{t\ell}$ sei der Rand von $S_0(t, \ell)$. Ich setze

$$\tilde{Z}_{t\ell}(\gamma) := \tilde{Z}_{q, S_0(t, \ell)}(\gamma)$$

und definiere für $\gamma \in \Gamma_\infty$

$$\tilde{Z}_\infty(\gamma) = \lim_{t, \ell \rightarrow \infty} \tilde{Z}_{t\ell}(\gamma)$$

Schließlich sei

$$\tilde{Z}_{t\ell} = \tilde{Z}_q(S_0(t, \ell))$$

In der Multiindex-Notation von Ruelle (siehe Anhang B) schreibt sich (2.30) dann in der Form

$$\log \tilde{Z}_{t\ell} = \sum_X \frac{\phi_c(X)}{X!} \tilde{Z}_{t\ell}^X$$

wobei die Summe über Multiindizes über Γ_∞ geht (man beachte, daß $\tilde{Z}_{t\ell}(\gamma) = 0$ ist, falls $\gamma \in \Gamma_\infty$ nicht Polymer in $\tilde{S}_0$ ist).

Im folgenden bezeichne $\text{supp } X$ etwas mißbräuchlich die Menge

$$\text{supp } X := \bigcup \{ \gamma : X(\gamma) > 0 \}$$

und $P(X)$ sei die Menge der Plaketten in $\text{supp } X$. Man beachte, daß $P(X)$

gemäß Bem. vi) aus 2.3 stets mindestens eine Plakette enthält, sofern $\tilde{z}_{t,l}^X \neq 0$ ist. Ich setze nun für $p \in S_\infty$

$$\alpha = \sum_{X: p \in P(X)} \frac{\phi_c(X)}{|P(X)|} \frac{\tilde{z}_\infty^X}{X!} \quad (2.39)$$

Gemäß Satz B.3 ist die rechte Seite für $|J| < J_0$ absolut konvergent, und da

$$\frac{\phi_c(X)}{|P(X)|} \frac{\tilde{z}_\infty^X}{X!}$$

translationsinvariant ist, ist α unabhängig von der gewählten Plakette $p \in S_\infty$.

Lemma 2.16:

Die Voraussetzungen aus Satz 2.15 seien erfüllt. Dann ist α für $|J| < J_0$ eine analytische Funktion von J und es gilt (wieder für $|J| < J_0$)

$$\alpha = \lim_{t,l \rightarrow \infty} \frac{1}{t!l} \log \tilde{Z}_{t,l} \quad (2.40)$$

Beweis:

Die Summe in (2.39) ist für $|J| < J_0$ absolut konvergent. Um aus der Analytizität der einzelnen Terme auf die Analytizität der Summe schließen zu können, benötige ich die gleichmäßige Konvergenz in jedem kompakten Teilgebiet K von $\{J : |J| < J_0\}$. Da b stetig ist, gibt es eine Konstante

$b' > b_0$, so daß $b(J) > b' \forall J \in K$ ist. Hieraus folgt mittels Satz B.3 die gleichmäßige Beschränktheit von

$$\sum_{X: p \in P(X)} \left| \frac{\phi_c(X)}{|P(X)|} \frac{\tilde{z}_\infty^X}{X!} \right|$$

in K . Der Satz von Montel ergibt dann die gewünschte gleichmäßige Konvergenz in K .

Es bleibt die Gleichung (2.40) zu zeigen. Ich schreibe $\log \tilde{z}_{t\ell}$ in der Form

$$\log \tilde{z}_{t\ell} = \sum_{p \in S_0} \sum_{X: p \in P(X)} \frac{\phi_c(X)}{|P(X)|} \frac{\tilde{z}_{t\ell}^X}{X!}$$

und erhalte für die Differenz $D_{t\ell} := \log \tilde{z}_{t\ell} - t\ell$

$$D_{t\ell} = \sum_{p \in S_0} \sum_{X: p \in P(X)} \frac{\phi_c(X)}{|P(X)|} \frac{1}{X!} (\tilde{z}_{t\ell}^X - \tilde{z}_\infty^X)$$

Offenbar tragen zu $D_{t\ell}$ nur solche Multi-Indizes bei, für die

- i) $\text{supp } X$ zusammenhängt (andernfalls ist $\phi_c(X) = 0$)
- ii) $\text{supp } X \cap S_0$ nicht leer ist und
- iii) $\text{supp } X$ mit $C_{t\ell}$ zusammenhängt (andernfalls ist X ein Multiindex mit $\text{supp } X \subset \tilde{S}_0$, der mit $C_{t\ell}$ kompatibel ist; dann ist aber $\tilde{z}_{t\ell}^X = \tilde{z}_\infty^X$).

Ich nenne die Multiindizes mit den Eigenschaften i) bis iii) Rand-Indizes. $D_{t\ell}$ schreibt sich also als Summe über Randindizes

$$D_{t\ell} = \sum_X' \frac{\phi_c(X)}{X!} (\tilde{z}_{t\ell}^X - \tilde{z}_\infty^X)$$

($\sum'$ heißt: Summe über Rand-Indizes). Da jeder Rand-Index X mit dem Rand $C_{t\ell}$ zusammenhängt, ist gemäß Satz B.3

$$|D_{t\ell}| \leq |C_{t\ell}| \frac{2 Q(b)}{1 - Q(b)} = 2(t+\ell) \frac{2 Q(b)}{1 - Q(b)}$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Satz 2.17:

Die Voraussetzungen aus Satz 2.15 seien erfüllt und es sei $|J| < J_0$. Dann gibt es von $(\ell$ und t unabhängige) Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und M , so daß

$$\begin{aligned} |\ln \tilde{Z}_{t\ell} - t\ell\alpha - 2(t+\ell) - 4\gamma| &\leq \\ &\leq \delta(2t+2\ell) e^{-M \min(t, \ell)} \end{aligned}$$

ist. α, β und γ sind für $|J| < J_0$ analytische Funktionen von J .

Beweis:

Satz 2.17 ist eine einfache Verallgemeinerung von Lemma 2.16. Es sei $R_{t\ell}$ die Menge aller Rand-Indizes bzgl. $S_0(t, \ell)$; für $X \in R_{t\ell}$ sei

$$K_{t\ell}(X) := \frac{\phi_C(X)}{|X|} (\tilde{Z}_{t\ell}^X - \tilde{Z}_\infty^X)$$

für $X \notin R_{t\ell}$ sei $K_{t\ell}(X) = 0$. Für $X \in R_{t\ell}$ sei $L_{t\ell}(X)$ die Menge der Links $\ell \in C_{t\ell}$ die nicht mit X kompatibel sind. Dann ist klarerweise

$$D_{t\ell} = \sum_{\ell \in C_{t\ell}} \sum_{X: \ell \in L_{t\ell}} \frac{K_{t\ell}(X)}{|L_{t\ell}(X)|}$$

Es seien nun $C_{t\ell}^1, \dots, C_{t\ell}^4$ die geraden Teilstücke von $C_{t\ell}$ (in Abb. 2.5 haben wir sie mit $C_1, \dots, C_4$ bezeichnet) und $R_{t\ell}^i$ bezeichne die Menge der Randindizes $X \in R_{t\ell}$, für die $L_{t\ell}(X) \subset C_{t\ell}^i$ ist. Ich definiere $I_{t\ell}^i$ als diejenige Translation senkrecht zu $C_{t\ell}^i$ für die $I_{t\ell}^i \cap C_{t\ell}^i$ den Nullpunkt schneidet.

Es sei $\tilde{R}_{t\ell}^i = I_{t\ell}^i \cap R_{t\ell}^i$ und $\tilde{K}_{t\ell}^i := K_{t\ell} \circ (I_{t\ell}^i)^{-1}$. Offenbar ist dann für

$X \in \tilde{K}_{t\ell}^i$ und für $t' \geq t$, $\ell' \geq \ell$ auch $X \in \tilde{K}_{t'\ell'}^i$, und es gilt
 $\tilde{K}_{t\ell}^i(X) = \tilde{K}_{t'\ell'}^i(X)$. Ich setze nun

$$\tilde{R}_\infty^i = \bigcup_{t,\ell} \tilde{R}_{t\ell}^i \quad \tilde{C}_\infty^i = \bigcup_{t,\ell} T_{t\ell}^i C_\ell^i$$

und definiere für $X \in \tilde{R}_\infty^i$

$$\tilde{K}_i(X) := \lim_{t,\ell \rightarrow \infty} \tilde{K}_{t\ell}^i(X)$$

$\tilde{L}_i(X)$ bezeichne die Menge aller Links in $\tilde{C}_\infty^i$, die mit X inkompatibel sind.
 Schließlich sei für $\ell \in \tilde{C}_\infty^i$

$$\beta_i := \frac{\sum_{X \in \tilde{R}_\infty^i : \ell \in \tilde{L}_i(X)} \tilde{K}_i(X)}{|\tilde{L}_i(X)|}$$

Offenbar ist dann β_i unabhängig von dem gewählten Link $\ell \in \tilde{C}_\infty^i$, und es ist¹⁶ $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$.

Das weitere Vorgehen ist offensichtlich: Man setze $\beta := \beta_i$ und

$$D_{t\ell}' = \ln \tilde{Z}_{t\ell} - t\ell\alpha - 2(t+\ell)\beta$$

und verfähre wie gehabt. Nach Extraktion des "Erkenntnisbeitrags" γ verbleibt eine Summe von Randindizes X , für die $|X| \geq \min(t, \ell)$ ist. Also läßt sich $|D_{t\ell}' - 4\gamma|$ durch

$$\delta(2t+2\ell) e^{-M \min(t, \ell)}$$

abschätzen, mit geeigneten Konstanten δ und M . ■

¹⁶ Hier geht ein, daß wir $\varepsilon = \tau$ gesetzt haben. Andernfalls wären nur $\beta_1 = \beta_3$, $\beta_2 = \beta_4$. In Satz 2.17 würden dann zwei Konstanten β, β' auftreten.

Anmerkung

iv) In Monte-Carlo Rechnungen werden manchmal "gemischte" Wirkungen der Form

$$S = - \sum_p J \{ \operatorname{Re} \chi_q(q_p) + \varrho \operatorname{Re} \chi_{\tilde{q}}(q_p) \}$$

betrachtet, wobei $\tilde{q}$ das Zentrum von G trivial darstellt. Sofern q gleich der im Wilson-Loop verwendeten Darstellung ist und die Bedingung B erfüllt, gibt es für beliebige $\varrho_0 > 0$ eine Konstante $J_0 = J_0(\varrho_0) > 0$, so daß Satz 2.17 für

$$(J, \varrho) \in \mathcal{G}_0 := \{(J, \varrho) : |J| < J_0, |\varrho| < \varrho_0\}$$

mutatis mutandis gültig bleibt. Insbesondere sind α , β und γ nun analytische Funktion von J und ϱ im Gebiet $\mathcal{G}_0$.

v) Sofern $\tilde{q}$ das Zentrum von G nicht trivial darstellt, läßt sich i.A. nur die etwas schwächere Aussage: "es gibt Konstanten $\varrho_0 > 0$, $J_0 > 0$, so daß Satz 2.17 für $(J, \varrho) \in \mathcal{G}_0$ mutatis mutandis gültig bleibt" beweisen.

Beweis:

iv) Offenbar genügt es, das Analogon zu Lemma 2.14 zu zeigen. Ich betrachte den Fall $\chi_q \neq \overline{\chi_q}$, $\chi_{\tilde{q}} \neq \overline{\chi_{\tilde{q}}}$. Es sei

$$\begin{aligned} m_Q(J, \varrho) &:= \\ &= \frac{1}{d_Q} \int \overline{\chi_Q(q)} e^{J \{ \operatorname{Re} \chi_q(q) + \varrho \operatorname{Re} \chi_{\tilde{q}}(q) \}} dq \end{aligned} \tag{2.41}$$

Man zeigt dann wie gehabt, daß k_0 , k_1 und $k_2 < \infty$ sind, solange $m_0(J, \varrho)$ und $m_q(J, \varrho)/J$ von Null verschieden sind.

Ich entwickle nun m_0 , m_q und $m_{\tilde{q}}$ um $J=0$ und erhalte

$$\begin{aligned} |m_0(J, \varrho) - 1| &\leq R(J, \varrho) \\ |m_q(J, \varrho) - \frac{J}{2d_q}| &\leq R(J, \varrho) \\ |m_{\tilde{q}}(J, \varrho) - \frac{J\varrho}{2d_{\tilde{q}}}| &\leq R(J, \varrho) \end{aligned} \quad (2.42)$$

mit

$$R(J, \varrho) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} |J|^n \{ \chi_q(\mathbb{1}) + |\varrho| \chi_{\tilde{q}}(\mathbb{1}) \}^n$$

Insbesondere läßt sich zu jedem ϱ_0 eine Konstante J_1 so wählen, daß für

$$(J, \varrho) \in \mathcal{G}_1 = \{(J, \varrho) : |J| < J_1, |\varrho| < \varrho_0\}$$

m_q/J und m_0 von Null verschieden sind. Wir fahren nun wie im Beweis von Lemma 2.14 fort. Um k_1 abzuschätzen, nützen wir aus, daß die rechte Seite von (2.32) aufgrund der Voraussetzungen an q und $\tilde{q}$ weder die Darstellungen 0 , q und $\tilde{q}$, noch die Darstellungen $\tilde{q}$ und $\overline{\tilde{q}}$ enthält. Unter Verwendung von (2.42) ergibt sich die Schranke

$$\begin{aligned} k_1 &\leq |m_q|^{-1} \{ e^{|J|} \{ \chi_q(\mathbb{1}) + \varrho \chi_{\tilde{q}}(\mathbb{1}) \} - \\ &\quad - m_0(|J|, |\varrho|) - 2d_q^2 m_q(|J|, |\varrho|) - 2d_{\tilde{q}}^2 m_{\tilde{q}}(|J|, |\varrho|) \} \\ &\leq |m_q|^{-1} (2 + 2d_q^2 + 2d_{\tilde{q}}^2) R(J, \varrho) \end{aligned}$$

Es folgt, daß $k_1(J, \varphi)$ und damit $k(J, \varphi)$ für $J \rightarrow 0$ gegen Null geht, und zwar gleichmäßig in φ , solange $|\varphi| < \varphi_0$ ist. Die Analytizität von $\tilde{z}_q(\alpha)$ und die Stetigkeit von k zeigt man wie gehabt.

Für den Fall, daß $\chi_q = \overline{\chi}_q$ oder $\chi_{\tilde{q}} = \overline{\chi}_{\tilde{q}}$ ist, verfährt man analog.

v) In diesem Fall kann die rechte Seite von (2.32) durchaus die Darstellungen $\tilde{q}$ und $\overline{\tilde{q}}$ enthalten. Der zusätzliche Term

$$2 d_{\tilde{q}}^2 \frac{m_{\tilde{q}}(|J|, |\varphi|)}{|m_q(J, \varphi)|}$$

ist nur dann klein, wenn neben J auch φ klein gewählt wird. ■

2.5 Verzierte Zufallsflächen

In den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels habe ich das vereinfachte System gemäß (2.4) betrachtet, dass aus (2.1) durch "Weglassen" der gewöhnlichen Polymere hervorgeht. Hier möchte ich den Übergang von (2.4) zu (2.1), d.h. den Übergang von $\tilde{w}_q(C)$ zu $\langle w_q(C) \rangle$ behandeln.

Ich setze zunächst für einen Multiindex X über der Menge Γ_q der gewöhnlichen Polymere und für eine zulässige Zufallsfläche S

$$\phi_c(S, X) := \phi_c(S, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

wobei $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_q$ so gewählt sind, daß jedes $\gamma \in \Gamma_q$ genau $X(\gamma)$ mal vorkommt. Da die Aktivität eines gewöhnlichen Polymers γ nicht von q und C abhängt, bezeichne ich sie im folgenden mit $z(\gamma)$. Schließlich setze ich für einen Multiindex X über Γ_q

$$z^X = \prod_{\gamma \in \Gamma_q} z(\gamma)^{X(\gamma)} \quad X! = \prod_{\gamma \in \Gamma_q} X(\gamma)!$$

vergleiche Anhang B. Mit diesen Notationen schreibt sich die Entwicklung (2.1) in der Form

$$\langle w_q(C) \rangle = \sum_S z_{q,C}(S) \sum_X \frac{z^X}{X!} \phi_c(S, X)$$

wobei die erste Summe über zulässige Zufallsflächen und die zweite über Multiindizes X über Γ_q geht. Die erste Summe läßt sich offenbar durch eine Summe über geladene Zufallsflächen (S, Q) ersetzen, vgl. Abschnitt 2.3.

$$\langle w_q(C) \rangle = \sum_{(S, Q)} \tilde{z}_q(S, Q) \sum_X \frac{z^X}{X!} \phi_c(S, X) \quad (2.43)$$

Man beachte, daß $\phi_c(S, X)$ nur dann von Null verschieden ist, wenn $S \cup \text{supp } X$ eine zusammenhängende Menge ist. $\text{supp } X$ steht etwas mißbräuchlich für die Vereinigung der Mengen γ , für die $X(\gamma) > 0$ ist. Es erscheint an dieser Stelle natürlich, den folgenden Begriff einer "verzierten Zufallsfläche" einzuführen.

Definition 2.6

Eine geordnete Menge (S, Q, X) , bestehend aus einer zulässigen Zufallsfläche S , einer Funktion Q von S nach $\hat{G} \setminus \{0\}$ und einem Multiindex X über $\bigcap_g$ heißt verzierte Zufallsfläche, wenn $\text{supp } X \cup S$ eine zusammenhängende Menge ist. Die Aktivität von (S, Q, X) ist durch

$$z_g(S, Q, X) := \tilde{z}_g(S, Q) \frac{\phi_c(S, X)}{X!}$$

definiert. Eine Plakette $p \in S$ heißt angeregt, wenn p Wall-Plakette ist, wenn $Q(p) \neq q$ ist oder wenn es eine Plakette $p' \in \text{supp } X$ gibt, so daß $\pi(p')$ mit $\pi(p)$ zusammenhängt. Es sei $\mathcal{A}$ die Menge der angeregten Plaketten in S und $B_1, \dots, B_n$ seien die π -Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{A} \cup \text{supp } X$. Es sei $A_i = B_i \cap \mathcal{A}$, und $X_i(\gamma)$ sei gleich $X(\gamma)$ resp. 0, je nachdem, ob $\gamma \in B_i$ ist oder nicht. Q_i sei die Einschränkung von Q auf A_i . Dann heißen $\alpha_1 = (A_1, Q_1, X_1), \dots, \alpha_n = (A_n, Q_n, X_n)$ die Anregungen in (S, Q, X) , $\pi(\alpha_i) := \pi(A_i) \cup (\text{supp } X_i)$ heißt der Schatten von α_i . Im übrigen seien die Definitionen aus Abschnitt 2.2. mutatis mutandis übernommen.

Mit diesen Definitionen schreibt sich (2.43) als Summe über verzierte Zufallsflächen

$$\langle W_g(C) \rangle = \sum_{(S, Q, X)} z_g(S, Q, X)$$

Man kann nun jeder verzierten Zufallsfläche wieder eine Menge von paarweise kompatiblen Standardanregungen zuordnen, und diese Zuordnung ist bijektiv. Anders als in Abschnitt 2.3 ist dies hier jedoch nicht ganz trivial. Denn für eine Anregung $\alpha = (A, Q, X)$ ist zwar $\pi(\alpha)$, nicht aber notwendig $\pi(A)$ zusammenhängend. Jedoch ist auch hier $P'(A) = \pi(A) \cap S_0$ für innere Anregungen zusammenhängend, und für äußere Anregungen hängen alle Zusammenhangskomponenten von $P'(A)$ mit $C_{t\ell}$ zusammen¹⁷⁾. Man definiert nun

¹⁷⁾ Beides zeigt man am leichtesten unter Verwendung der Tatsache, daß $P'(A) = P'(\alpha) := \pi(\alpha) \cap S_0$ ist.

wieder die Randkurven von A als Lift der Randkurven von $P'(A)$ und verfährt im weiteren wie in Abschnitt 2.2.

Es bleibt das Problem der "Faktorisierung der Aktivitäten". Ich behaupte zunächst, daß $\phi_c(S, X) = \phi_c(A, X)$ ist, wenn immer $A \subset S$ sämtliche Plaketten aus S enthält, die mit $\text{supp } X$ zusammenhängen. Da $\phi_c(A, X)$ streng genommen nicht definiert ist, wenn A keine zulässige Zufallsfläche ist, führe ich die folgende evidente Verallgemeinerung der Definitionen aus 1.2 ein:

Es seien $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ beliebige Mengen von Plaketten in $\mathcal{U} = \mathbb{Z}^3$. $G(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ sei der Graph über $0, \dots, n$, der die Linie ij immer dann enthält, wenn $i \neq j$ ist und wenn es Plaketten $p_i \in \gamma_i$, $p_j \in \gamma_j$ gibt, so daß p_i mit p_j zusammenhängt. $\phi_c(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ ist dann durch

$$\phi_c(\gamma_0, \dots, \gamma_n) = \sum_{C \subset G(\gamma_0, \dots, \gamma_n)} (-1)^{\ell(C)} \quad (2.44)$$

definiert, wobei die Summe über alle zusammenhängenden Graphen C über $0, \dots, n$ geht, die in $G(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ enthalten sind. Für eine beliebige Menge A von Plaketten und für einen Multiindex X über Γ_g setze man dann

$$\phi_c(A, X) = \phi_c(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

wobei $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_g$ wieder so gewählt seien, daß jedes $\gamma \in \Gamma_g$ genau $X(\gamma)$ mal vorkommt. Ich definiere nun die Aktivität einer Anregung $\alpha = (A, Q, X)$ durch

$$z_g(\alpha) := \tilde{z}_g(A, Q) \frac{\phi_c(A, X)}{X!} \quad (2.45)$$

Lemma 2.18:

Es sei (S, Q, X) eine verzierte Zufallsfläche und $\alpha_1 = (A_1, Q_1, X_1), \dots, \alpha_n = (A_n, Q_n, X_n)$ seien die Anregungen in (S, Q, X) . Dann gilt

$$z_g(S, Q, X) = z_g(S_0) \prod_{i=1}^n z_g(\alpha_i) \quad (2.46)$$

Beweis:

Ebenso wie in Abschnitt 2.3 zeigt man hier, daß

$$\tilde{z}_g(S, Q) = z_g(S_0) \prod_{i=1}^n \tilde{z}_g(A_i, Q_i)$$

ist. Es sei $\Gamma = \{\gamma \in \Gamma_g : X(\gamma) > 0\}$, Γ_i sei analog definiert.

Dann ist für $i \neq j$ offenbar $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$. Es folgt, daß

$$X! = \prod_{i=1}^n X_i!$$

ist. Man betrachte schließlich den kombinatorischen Faktor $\phi_c(S, X)$:

Es seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_g$ so gewählt, daß jedes $\gamma \in \Gamma_g$ genau $X(\gamma)$ mal vorkommt; G sei der Graph $G(S, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Da für $i \neq j$ $\pi(\gamma)$ nicht mit $\pi(\gamma')$ zusammenhängt, wenn $\gamma \in \Gamma_i$ und $\gamma' \in \Gamma_j$ ist, kann auch γ selbst nicht mit γ' zusammenhängen. Also enthält $G(S, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ keine Linie, die ein Polymer aus Γ_i mit einem Polymer aus Γ_j verbindet. In Verbindung mit (2.44) folgt hieraus die Gleichung

$$\phi_c(S, X) = \prod_{i=1}^n \phi_c(S, X_i) \quad (2.47)$$

Da offensichtlich $\phi_c(S, X_i) = \phi_c(A_i, X_i)$ ist, ist die Gleichung (2.46) bewiesen. ■

Mit Hilfe von Lemma 2.18 schreibt sich

$$Z_g(S_0) = \lambda_q^{-|S_0|} \langle W_g(C_{t\ell}) \rangle \quad (2.48)$$

als Summe über Mengen von paarweise kompatiblen Standardanregungen über S_0 :

$$Z_g(S_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}^c \prod_{i=1}^n z_{g, S_0}(\gamma_i) \quad (2.49)$$

Ich möchte $Z_q(S_0)$ als Zustandssumme eines Polymersystems in $\tilde{S}_0$ darstellen und definiere wieder $\gamma(\alpha) := \pi'(\alpha) \cup \ell(\alpha)$, wobei $\ell(\alpha)$ durch Projektion von $\pi(\alpha) \setminus \tilde{S}_0$ auf $C_{t\ell}$ entsteht. Da ich $\pi(\alpha)$ und nicht $\pi(A)$ zur Definition von $\gamma(\alpha)$ herangezogen habe ($\alpha = (A, Q, X)$), ist $\gamma(\alpha)$ wieder zusammenhängend. Wir können deshalb wie in Abschnitt 2.3 fortfahren und erhalten

$$Z_q(S_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}^c \prod_{i=1}^n z_{q, S_0}(\gamma_i) \quad (2.50)$$

wobei die Polymere γ_i wieder zusammenhängende Mengen $\gamma_i \subset \tilde{S}_0$ sind.

Die Aktivitäten $z_{q, S_0}(\gamma)$ gehen aus den Aktivitäten $z_q(\alpha)$ gemäß Def. 2.4

hervor. Um die Konvergenz der resultierenden Mayer-Entwicklung

$$\log Z_q(S_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_{q, S_0}(\gamma_i) \quad (2.51)$$

zu kontrollieren, benötige ich das folgende Analogon zu Lemma 2.13; $\text{supp } \alpha$ bezeichnet dabei für eine Standardanregung $\alpha = (A, Q, X)$ das geordnete Paar $(A, \text{supp } X)$.

Lemma 2.19:

Im Wilson-Loop und in der Wirkung sei dieselbe Darstellung q verwendet und diese erfülle die Bedingung B. Dann gibt es eine Konstante $J_1 > 0$ und eine für $|J| < J_1$ definierte, stetige Funktion $\tilde{k}(J)$, so daß gilt

- i) $\tilde{k}(J) \rightarrow 0$ für $J \rightarrow 0$
- ii) Für endliche Mengen A, B von Plaketten in $\mathbb{L}$ ist

$$\sum_{\alpha: \text{supp } \alpha = (A, B)} |z_q(\alpha)| \leq \tilde{k}(J)^{|A| + |B|} \quad (2.51)$$

Beweis:

Ich betrachte zunächst die Summe

$$\sum_Q |z_q(A, Q, X)|$$

bei festgehaltenem Multiindex X . Es sei $\tilde{A}(X)$ die Menge der flachen Plaketten $p \in A$, für die $\pi(p)$ mit der Projektion einer Plakette $p' \in \text{supp } X$ zusammenhängt, $a(X) := |\tilde{A}(X)|$. Für eine flache Plakette $p \in A \setminus \tilde{A}(X)$ muß

dann $Q(p) \neq q$ sein, da p sonst nicht angeregt wäre. Ebenso wie die Ungleichung (2.34) aus Lemma 2.13 zeigt man dann, daß

$$\sum_Q |z_q(A, Q, X)| \leq R^{|A| - a(X)} (d_q^2 R_2)^{a(X)} \left| \frac{z^X}{X!} \Phi_c(A, X) \right| \quad (2.52)$$

ist. Da es für jede Plakette $p' \in \text{supp } X$ maximal fünf Plaketten in $\tilde{A}$ gibt, deren Projektion mit $\pi(p')$ zusammenhängt (5 ist die maximale Anzahl von Plaketten in $\pi(\tilde{A})$, die mit einem vorgegebenen Link oder einer vorgegebenen Plakette in $\tilde{\Sigma}_\infty$ zusammenhängen können), ist offensichtlich $|\tilde{A}| \leq 5|X|$. Ich schätze nun z^X ab

$$|z^X| \leq R_0^{|X|} \leq R_0^{|X|/2} R_0^{a(X)/10}$$

und erhalte

$$\begin{aligned} \sum_Q |z_q(A, Q, X)| &\leq R^{|A|} \frac{R_0^{|X|/2}}{X!} |\Phi_c(A, X)| \\ &\leq R^{|A| + |\text{supp } X|} \frac{R_0^{|X|/4}}{X!} |\Phi_c(A, X)|. \end{aligned} \quad (2.53)$$

wobei $k'(J) := \max \{k(J), d_{qk_2}^2(J) k_0(J)^{1/10}\}$ ist. Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß $k_0^{1/4} \leq k'$ und $|\text{supp } X| \leq |X|$ ist. Ebenso wie im Beweis von Satz C.3 (siehe Anhang C) zeigt man nun, daß

$$\sum_X \frac{R_0^{|X|/4}}{X!} |\Phi_c(A, X)| \leq \frac{1}{1 - Q'} e^{|A|} \quad (2.54)$$

ist, mit

$$Q' = \frac{e R_0^{1/4} K_0}{1 - e R_0^{1/4} K_0}$$

wobei K_0 die kombinatorische Konstante aus Lemma C.1 ist. (2.53) und (2.54)

ergeben die gewünschte Ungleichung (2.51) mit $k(J) = k'(J)e/(1-Q')$. Da $k_2(J)$ für $J \rightarrow 0$ beschränkt bleibt und $k(J)$, $k_0(J)$ gegen Null gehen (siehe Abschnitt 2.4), geht $\tilde{k}(J)$ für $J \rightarrow 0$ gegen Null. Die Stetigkeit von $\tilde{k}$ folgt aus der Stetigkeit von k , k_0 und k_2 . ■

Ebenso wie im letzten Abschnitt beweist man nun die Existenz einer Konstanten $J_0 > 0$, so daß die Mayer-Entwicklung (2.50) für $|J| < J_0$ absolut konvergiert.

Satz 2.20:

Im Wilson-Loop und in der Wirkung sei dieselbe Darstellung q verwendet und diese erfülle die Bedingung B gemäß Def. 2.5. Dann gibt es eine Konstante $J_0 > 0$, so daß die Mayer-Entwicklung (2.50) für $|J| < J_0$ absolut konvergiert. Desweiterenb gilt: für $|J| < J_0$ gibt es (von ℓ und t unabhängige) Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und M , so daß

$$|\ln Z_{t,\ell} - t\ell\alpha - 2(t+\ell)\beta - 4\gamma| \leq \\ < (2t + 2\ell)\delta e^{-M \min(t, \ell)}$$

ist. α, β und γ sind analytische Funktionen von J im Gebiet $\{J: |J| < J_1\}$.

Beweis:

Offenbar ist nur das Analogon zu Satz 2.15 zu zeigen. Dies bereitet jedoch keine Schwierigkeiten (man verwende Lemma 2.19 und die Tatsache, daß für $\alpha = (A, Q, X)$ $|\gamma(\alpha)| \leq |A| + |\text{supp } X|$ ist). ■

Anmerkung:

i) Für $|J| < J_0$ ist λ_q eine analytische Funktion von J . Da $\lambda_q(J)/J$ für $|J| \rightarrow 0$ gegen eine Konstante > 0 geht, ist $\log \lambda_q - \log J$

offenbar in einer hinreichend kleinen Umgebung U von Null analytisch.

Ich will im folgenden stets annehmen, daß J_0 so klein gewählt ist, daß $J \in U$ ist, wenn $|J| < J_0$ ist. Insbesondere ist dann,

$$\sigma_9^{(w)} = -\log \lambda_9 - \alpha$$

für $|J| < J_0$ bis auf den führenden Logarithmus $\log 1/J$ analytisch.

2.6 Zusammenfassung, Diskussion

In den letzten Abschnitten habe ich

$$Z_{t\ell}^{(q)} := \lambda_q^{-t\ell} \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle$$

als Zustandssumme eines Polymersystems geschrieben, wobei die entsprechenden Polymere in der von $C_{t\ell}$ aufgespannten Minimalfläche $S_0(t, \ell)$ leben. Für große Kopplungen g^2 wurde die Konvergenz der resultierenden Mayer-Entwicklung bewiesen. Hier möchte ich die sich ergebenden Theoreme für das Wilson-Potential und die Saitenspannung formulieren und diskutieren. Der Einfachheit halber setze ich $\varepsilon = \tau = 1$ (das Folgende bleibt jedoch auch für leicht asymmetrische Gitterkonstanten wahr, nur der Limes $\tau \rightarrow 0$ bedarf einer gesonderten Diskussion).

Theorem 2.21:

Es sei $\nu = d + 1 = 3$. Im Wilson-Loop und in der Wirkung sei dieselbe Darstellung q verwendet und diese erfülle die Bedingung B aus Def. 2.5. Dann gibt es eine Konstante g_0^2 , so daß gilt

i) Das Wilson-Potential $V_{qq}^{(W)}(\ell)$ ist für beliebige ℓ und für $|g^2| > g_0^2$ abgesehen von dem führenden Beitrag $\ell \log g^2$ eine analytische Funktion von $1/g^2$.

ii) Die Saitenspannung $\sigma_q^{(W)}$ ist für $|g^2| > g_0^2$ eine analytische Funktion von $1/g^2$, abgesehen von dem führenden Beitrag $\log g^2$.

iii) Für $|g^2| > g_0^2$ gibt es (von ℓ unabhängige) Konstanten V_0 , K und M ($K < \infty$, $M > 0$), so daß

$$|V_{q\bar{q}}^{(W)}(\ell) - \ell \sigma_q^{(W)} - V_0| \leq K e^{-\ell M}$$

ist. V_0 ist eine analytische Funktion von $1/g^2$ im Gebiet $\{1/g^2 : g^2 > g_0^2\}$.

Beweis:

Das Theorem folgt sofort aus Satz 2.20 und Anmerkung i) aus dem letzten Abschnitt (man beachte, daß $J = 2/g^2$ ist). ■

Anmerkungen:

i) Für die fundamentale Darstellung von $U(N)$ oder $SU(N)$ ist die Bedingung B erfüllt.

ii) Die Einschränkung auf $\nu = 3$ wurde nur der größeren Anschaulichkeit halber gewählt. Der obige Satz bleibt jedoch auch für $\nu > 3$ wahr, vgl. Bem. vii) aus Abschnitt 2.2.

iii) Für $G = \mathbb{Z}_2$ wurde die Analytizität von $\sigma - \log g^2$ von Bricmont et al. bewiesen¹⁸ [1979].

iv) Für $G = \mathbb{Z}_2$ und $SU(2)$ hat Münster die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\sigma - \log g^2$ (nach Potenzen von $1/g^2$) bis zur Ordnung 12 bestimmt [1979].

v) Wie in der Einführung zu diesem Kapitel diskutiert, divergiert die von Münster skizzierte Clusterentwicklung für $\sigma_q^{(W)} - \log g^2$. Die unter iv) erwähnten Ergebnisse sind hiervon jedoch nicht betroffen, da Münster die Koeffizienten der Saitenspannung direkt aus der Clusterentwicklung für $\langle W_q(C) \rangle$ extrahiert. Er benötigt hierfür jedoch die Tatsache, daß es (in einer Umgebung von Null) analytische Funktionen $\alpha(1/g^2)$, $\beta(1/g^2)$ und $\gamma(1/g^2)$ gibt, so daß

$$\log \langle W_q(C) \rangle - (\log g^2 + \alpha) \ell t - \\ - 2\beta(\ell + t) - 4\gamma = O((1/g^2)^{\min(\ell, t)})$$

¹⁸ Tatsächlich betrachten Bricmont et al. die Oberflächenspannung des drei-dimensionalen Ising Modells. Per Dualität entspricht diese jedoch der Saitenspannung der drei-dimensionalen $\mathbb{Z}_2$ -Eichtheorie.

ist¹⁹. Insofern liefern die Betrachtungen dieses Kapitels die theoretischen Grundlagen für die Berechnungen Münsters.

vi) Die von Münster skizzierte Clusterentwicklung für $\sigma_q^{(w)} - \log q^2$ divergiert zwar, jedoch ist sie asymptotisch im folgenden Sinn: Es sei

$$\sigma_q^{(w)} - \log q^2 = \sum_X \frac{\phi_c(X)}{X!} z_q^X$$

die Münster'sche Clusterentwicklung. Dann gibt es für beliebige $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl $N(n) < \infty$ und eine Konstante K_n , so daß

$$\left| \sigma_q^{(w)} - \log q^2 - \sum_{|X| \leq N(n)} \frac{\phi_c(X)}{X!} z_q^X \right| \leq K_n |q^2|^{-n}$$

ist.

Während die Wahl der Wirkung S als $S = \sum s(q_p)$ in gewisser Weise natürlich ist, ist die spezielle Wahl $s(q_p) = \frac{2}{q^2} \operatorname{Re} \chi_q(q_p)$ natürlich willkürlich. Insbesondere sollten die Aussagen von Theorem 2.21 wahr bleiben, wenn man "gemischte" Wirkungen der Form $s(q_p) = \frac{1}{q^2} (\operatorname{Re} \chi_q(q_p) + \varrho \operatorname{Re} \chi_{\tilde{q}}(q_p))$ betrachtet, zumindestens solange ϱ klein ist. Dies ist die Aussage des folgenden

Theorem 2.22:

Es seien die Voraussetzungen aus Theorem 2.21 erfüllt. Zur Wirkung S sei aber noch ein zusätzlicher Term ($q \neq \tilde{q} \neq \bar{q}$)

$$- \frac{2}{q^2} \sum_p \varrho \operatorname{Re} \chi_{\tilde{q}}(q_p)$$

¹⁹ De facto benötigt er die analoge Aussage für die t'Hooft'sche Saitenspannung $\sigma_q^{t'Hooft}$.

hinzugefügt. Dann gibt es Konstanten ρ_0, q_0^2 , so daß die Aussagen von Theorem 2.21 für

$$\left(\frac{1}{q^2}, \rho\right) \in \mathcal{G}_0 = \left\{\left(\frac{1}{q^2}, \rho\right) : |\rho| < \rho_0, |q^2| > q_0^2\right\}$$

mutatis mutandis gültig bleiben. Insbesondere ist $\sigma_q^{(W)} - \log q^2$ im Gebiet $\mathcal{G}_0$ analytisch.

Sofern $\tilde{q}$ das Zentrum trivial darstellt, gilt die etwas schärfere Aussage: $\forall \rho_0 > 0 \exists q_0^2 < \infty$, so daß die Aussagen von Theorem 2.21 für $\left(\frac{1}{q^2}, \rho\right) \in \mathcal{G}_0$ mutatis mutandis gültig bleiben.

Beweis:

Theorem 2.22 geht aus Theorem 2.21 in derselben Weise hervor, wie die Anmerkungen iv) und v), Abschnitt 2.4, aus Satz 2.17 hervorgehen. ■

Anmerkung

vi) Etwas allgemeiner kann man Zusatzterme der Form

$$\frac{2}{q^2} \sum_{i=1}^n \rho_i \operatorname{Re} \chi_{q_i}(q)$$

betrachten, mit beliebigen Darstellungen $q_1, \dots, q_n \notin \{q, \bar{q}\}$. $\sigma_q^{(W)} - \log q^2$ ist dann auch als Funktion der Variablen $1/q^2, \rho_1, \dots, \rho_n$ analytisch.

Nach der Formulierung der Theoreme 2.21 und 2.22 möchte ich mögliche Verallgemeinerungen diskutieren. Zunächst sei jedoch die Bedeutung der in beide Theoreme eingehenden Bedingung B (Def. 2.5, Seite 70) erläutert.

Ich will annehmen, daß die Darstellung q zwar zu einer nichttrivialen Zentrumsdarstellung q' führt, aber die Bedingung B ii) nicht erfüllt sei. D.h. ich nehme an, daß q und $\bar{q}$ zur selben Zentrumsdarstellung $q' = \bar{q}'$ führen, ohne daß $q = \bar{q}$ ist. Dann kann für flache Plaketten $p \in Q(p)$ sowohl gleich q als auch gleich $\bar{q}$ sein: es gibt also zwei "Grundzustände". Da die Clusterentwicklung aus den letzten Abschnitten den zweiten Grundzustand als Anregung behandelt, kann sie natürlich nicht konvergieren. Es ist jedoch klar wie sie zu modifizieren ist:

Man nennt eine flache Plakette angeregt, wenn $Q(p) \in \{q, \bar{q}\}$ ist, und betrachtet Äquivalenzklassen $\{\alpha, \bar{\alpha}\}$ von Anregungen, wobei für $\alpha = (A, Q)$ $\bar{\alpha} = (A, \bar{Q})$ ist²⁰. Eine Anregung α hat nun gewisse Ähnlichkeiten mit den Peierls-Konturen aus der Tieftemperaturentwicklung des Ising-Modells: Sie gibt an, welche Grundzustände für die von ihr eingeschlossenen flachen Teilstücke zu wählen sind, vorausgesetzt der äußere Grundzustand ist fixiert²¹. Das weitere Vorgehen ist wie gehabt und wir erhalten wieder die Aussagen aus Theorem 2.21 resp. 2.22.

Die Bedingung B ii) kann also fallengelassen werden. Dies gilt jedoch nicht für die Bedingung B i). Es sei nämlich q so gewählt, daß q das Zentrum trivial darstellt. Zunächst bricht dann der Beweis von Lemma 1.7 ii) zusammen. Es ist jedoch wohlbekannt, daß dies kein rein technisches Problem ist. Es sei nämlich γ_0 das C-Polymer gemäß Abb. 2.6. Dann kann man unter relativ allgemeinen Bedingungen zeigen, daß $z_{q,C}(\gamma_0) \neq 0$ ist. Für $G = SU(N)$ folgt dies sofort aus der Tatsache, daß für irreduzible Darstellungen q , die das Zentrum trivial darstellen $q \in q \times \bar{q}$ ist (der Beweis ist eine

²⁰ Hier bezeichnet $\bar{q}$ die zu q konjugierte Darstellung.

²¹ In gewisser Weise war dies natürlich auch schon zuvor der Fall; denn die Höhe eines flachen Teilstücks charakterisiert klarerweise auch verschiedene Grundzustände. Es kommt sozusagen nur eine zusätzliche, "innere" Entartung des Grundzustands hinzu.

einfache Übung im Umgang mit Young-Tableaus)

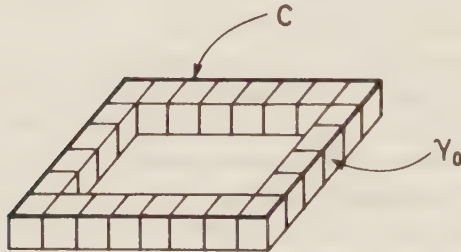


Abb. 2.6: Das Polymer γ_0

Der führende Term in der Clusterentwicklung von $\langle W_q(C) \rangle$ fällt also nur exponentiell mit der Länge $|C|$ von C ab, statt exponentiell mit der Fläche $A(C)$. Dies legt die Vermutung nahe, daß für q , die das Zentrum trivial darstellen, $\langle W_q(C) \rangle$ nicht mehr dem Flächengesetz sondern dem "Umfangs"-Gesetz

$$|\langle W_q(C) \rangle| \geq \text{const } e^{-\beta |C|}, \quad \beta > 0$$

folgt, und daß das Quark-Antiquark Potential $V_{q\bar{q}}^{(W)}$ beschränkt ist. In der Literatur wird dieses Verhalten an verschiedenen Stellen als Theorem formuliert. Mir ist jedoch kein einziger Beweis bekannt, der fehlerfrei ist, oder zumindestens mit etwas Arbeit zu einem fehlerfreien Beweis ausgearbeitet werden kann²².

²² Etwas anders ist die Situation im Falle des Polyakovpotentials. Hier konnte Seiler [1985] zeigen, daß $F_{q\bar{q}}^{(\beta)}$ für fast alle hinreichend großen g^2 beschränkt ist. Der Beweis ist jedoch nicht auf das Wilson-Potential übertragbar und versagt im Limes $\beta \rightarrow \infty$.

Die in diesem Kapitel entwickelten Methoden sollten es jedoch ermöglichen, die obige Aussage zu beweisen. Statt Anregungen über S_0 betrachte man Anregungen über γ_0 , wobei die vier ($\nu = 3$) Grundzustände gemäß Abb. 2.7 an die Stelle der flachen Plaketten treten. Den Translationen senkrecht zu S_0 entsprechen nun die Rotationen um die geraden Teilstücke von C.

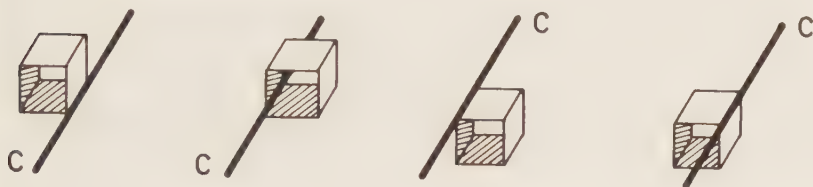


Abb. 2.7: Die vier Grundzustände

Es treten jedoch zwei zusätzliche Probleme auf: zunächst einmal ist schon die Konfiguration mit minimaler "Energie" entartet (man spiegele γ_0 an der Ebene Σ , die durch C aufgespannt wird). Und zum anderen ist es nicht mehr erlaubt, beliebige paarweise kompatible Anregungen zu kombinieren; denn die sich ergebenden "Verdrillungen" des Grundzustands müssen sich klarerweise zu einem Vielfachen von 2π ergänzen.

Das erste Problem ist wohlbekannt aus der Tieftemperaturentwicklung für Spinsysteme mit periodischen Randbedingungen. Und auch die Lösung ist bekannt: man fixiere den Spin an einer Stelle, und summiere am Ende über die Werte dieses Spins. Ich gehe hier genauso vor und betrachte die "Zustandssumme" $\tilde{Z}(\phi_1, \dots, \phi_4)$, die aus $\langle W_q(C) \rangle$ durch Fixieren der Eckenzustände $\phi_1, \dots, \phi_4$ hervorgeht. ϕ_i ist hierbei entweder selbst eine Anregung, oder einer der beiden Grundzustände²³.

²³Für die Ecken von C gibt es offenbar nur zwei Grundzustände.

$\tilde{z}(\phi_1, \dots, \phi_4)$ schreibt sich nun offenbar als Summe über Anregungen $A_1, \dots, A_n$, deren "Verdrillungswinkel" sich genau zu den Winkeldifferenzen $\delta_1, \dots, \delta_4$ zwischen den Zuständen ϕ_i ergänzen. Ähnliche Zwangsbedingungen sind wohl bekannt aus der Theorie von Coulomb-Systemen. Dort handelt es sich meist um eine fixierte Gesamtladung. Zur Behandlung solcher Zwangsbedingungen erweist es sich als praktisch, die "Fouriertransformierte" zu betrachten.

Für $\tilde{z}(\phi_1, \dots, \phi_4)$ kann man dies wie folgt formalisieren: Es sei A_k eine Anregung, die mit dem geraden Teilstück C_i von C (siehe Abb. 2.5) zusammenhängt. Dann bezeichnet $\varphi_i(A_k)$ den "Verdrillungswinkel" von A_k . Für $j \neq i$ setze ich $\varphi_j(A_k) = 0$. Nach Abfaktorisieren des führenden Beitrags $z(\phi_1, \dots, \phi_4)$ ist dann $\tilde{z}(\phi_1, \dots, \phi_4)$ offenbar gleich

$$\begin{aligned} z(\phi_1, \dots, \phi_4) &= \sum_{\{A_1, \dots, A_n\}}^c \prod_{i=1}^n z(A_i) \\ &\quad \sum_k \varphi_i(A_k) = \delta_i \\ &= \sum_{q_1, \dots, q_4} e^{-i(\delta, q)} \sum_{\{A_1, \dots, A_n\}}^c \prod_{i=1}^n z(A_i) e^{i(\varphi(A_i), q)} \end{aligned}$$

mit geeignet definierten Aktivitäten $z(A_k)$. δ_i ist die Winkeldifferenz zwischen den Eckzuständen ϕ_k und ϕ_ℓ , wobei ℓ, k die beiden Endpunkte von C_i bezeichnet. Die Fouriertransformierte

$$Z(q) = \sum_{\{A_1, \dots, A_n\}}^c \prod_{i=1}^n z(A_i) e^{i(\varphi(A_i), q)}$$

enthält nun keine Zwangsbedingungen mehr und kann mit den üblichen Methoden untersucht werden. Die Clusterentwicklung für die freie Energie ergibt

²⁴ Anregungen, die mit mehr als einem geraden Teilstück von C zusammenhängen, absorbiere ich in $\phi_1, \dots, \phi_4$.

$$Z(q) = e^{-|C|\beta(q) - \gamma(q)} (1 + O(e^{-|C|K}))$$

wobei β und γ nicht von ℓ abhängen und β von der Form $\beta_0 + \sum_{i=1}^4 \beta_i \cos q_i + \dots$ ist. Es folgt, daß für $g \neq 0$

$$Z(q)/Z(0) = O(e^{-|C|K(q)})$$

ist, mit einer von g abhängenden Konstante $K(g) > 0$. Man erhält

$$\tilde{Z}(\phi_1, \dots, \phi_4) = z(\phi_1, \dots, \phi_4) e^{-|C|\beta - \gamma} (1 + O(e^{-|C|K}))$$

wobei der Eckenbeitrag γ von $\phi_1, \dots, \phi_4$ abhängt, während β von den Zuständen $\phi_1, \dots, \phi_4$ unabhängig ist.

Es bleibt die Summation über die Eckenzustände $\phi_1, \dots, \phi_4$:

$$\begin{aligned} \langle W_q(C) \rangle &= e^{-|C|\beta} \sum_{\phi_1, \dots, \phi_4} z(\phi_1, \dots, \phi_4) e^{-\gamma(\phi_1, \dots, \phi_4)} \times \\ &\times (1 + O(e^{-|C|K})) \end{aligned}$$

Diese bereitet jedoch keine weiteren Schwierigkeiten und man erhält

$$\langle W_q(C) \rangle = e^{-|C|(\beta' + \beta) - \gamma'} (1 + O(e^{-|C|K'}))$$

mit einer neuen Konstante $K' > 0$. β' rührt von dem führenden Polymer

γ_0 her und ist gleich $\beta' = 0$ ($4 \log q^2$), γ' ist die "Eckenkorrektur"; β und γ' sind analytische Funktionen von $1/q^2$ in einer geeigneten Umgebung von Null. Bis auf technische Details²⁵ ist das gesuchte "Umfangsgesetz" hiermit bewiesen.

²⁵ In gewisser Weise sind diese hier einfacher als im Beweis von Theorem 2.21. Denn der Rand einer Anregung besteht nun stets aus genau zwei geschlossenen Kurven, die jeweils eine Plakette bilden, die C in einem Punkt berührt. Dies sollte die Analyse der Faktorisierungseigenschaften erheblich vereinfachen.

Zum Schluß dieses Kapitels möchte ich die Verallgemeinerung der Theoreme 2.21 und 2.22 auf nicht verschwindende Temperaturen $\beta^{-1} > 0$ diskutieren. An die Stelle des Wilson-Loops treten nun die zwei Polyakov-Loops C_x , C_y , und statt der in $C_{t\ell}$ eingespannten Zufallsflächen ergeben sich nun Zufallsflächen, die durch C_x und C_y berandet sind: $\partial S = C_x \vee C_y$. Die Fläche S ist also nur an zwei Kanten fixiert, die beiden anderen sind zwar durch die Periodizität des Gitters miteinander verbunden, können aber ansonsten frei fluktuieren.

Dies führt zu einer neuen Art von Anregungen, die ich Stufen nennen möchte (siehe Abb. 2.8). Formal könnte man etwa wie folgt zwischen Stufen und Wällen unterscheiden. Eine Anregung A heißt Stufe, wenn es keinen Weg in $S_0 \setminus \pi(A)$ gibt, der C_x mit C_y verbindet. Andernfalls heißt A wie bisher Wall. Offenbar gibt es nun wieder eine Art Ladungserhaltung: die Höhe der Stufen in S muß sich zu Null kombinieren, da die Fläche S sonst den zweiten Polyakov-Loop "verpaßt".

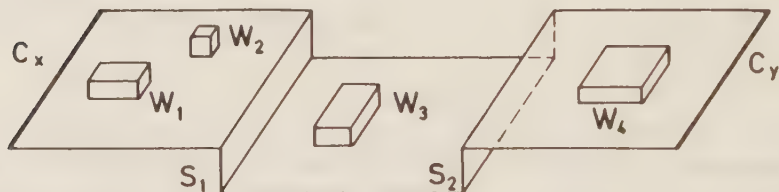


Abb. 2.8: Wälle und Stufen

Wieder löst man das Problem der Zwangsbedingung durch Fouriertransformation: Es sei $G(x) = \langle \overline{L_q(0)} L_q(x) \rangle_\beta$. Dann setze ich

$$\hat{G}(\ell, p) = \sum_{x: x_1 = \ell} G(x) e^{ipx_2}$$

Offenbar läßt sich der Faktor e^{ipx} auf die einzelnen Stufen verteilen, indem man deren Aktivität mit e^{iph} multipliziert, wobei h die Höhe der Stufe ist. Durch die Summation über die Querrichtung fällt die Einschränkung weg, daß sich die Stufenhöhe zu Null kombinieren muß, und $\hat{G}(\ell, p)$ läßt sich als Zustandssumme eines geeigneten Polymersystems schreiben. Man erhält, bis auf exponentiell kleine Korrekturen

$$\hat{G}(\ell, p) \approx e^{-\ell \alpha(p) - \gamma(p)}$$

wobei sich $\alpha(p)$ als eine Summe

$$\alpha(p) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos np$$

schreibt. α_0 enthält neben dem führenden Term $-\beta \log \lambda_q = 0$ ($\beta \log q^2$) unter anderem die Beiträge der Wälle. Der führende Beitrag in α_1 hingegen kommt von den Stufen mit Höhe 1. Mit Hilfe eines Arguments, welches typisch für den Beweis zentraler Grenzwertsätze ist, (vgl. z.B. [Gallavotti, 1972] oder [Bricmont, Fröhlich, 1985b]) erhält man

$$\int \frac{dp}{2\pi} \frac{\hat{G}(\ell, p)}{\hat{G}(\ell, 0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \alpha' \ell}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ell}\right) \right)$$

wobei $\alpha' = \sum n^2 \alpha_n$ ist. Für das Quark-Antiquark-Potential $F_{q\bar{q}}^\beta$ erhält man schließlich

$$F_{q\bar{q}}^\beta = \sigma_{q,\beta}^{(P)} \ell + \frac{d-1}{2\beta} \log \ell + O(1)$$

mit $\sigma_{q,\beta}^{(P)} = \frac{1}{\beta} \propto (\beta \rightarrow 0)$. Da die Aktivität der Stufen exponentiell mit β fällt, ergibt sich offenbar das folgende

Theorem 2.23:

Es sei $\xi = \tau = 1$ und $\nu = d + 1 > 3$. Im Polyakov-Loop und in der Wirkung sei dieselbe Darstellung q verwendet und diese stelle das Zentrum von G nicht-trivial dar. Dann gibt es eine (nur von d , G und q abhängende) Konstante g_0^2 , so daß für $|g^2| > g_0^2$ gilt:

- i) $\forall \beta \in \tau\mathcal{N}$ ist $\sigma_{q,\beta}^{(P)}$ analytisch als Funktion von $1/g^2$.
- ii) $\sigma_{q,\beta}^{(P)}$ geht für $\beta \rightarrow \infty$ gegen $\sigma_q^{(W)}$, d.h. es ist $\tilde{\sigma}_q^{(P)} = \sigma_q^{(W)}$

Bemerkung:

vii) Wieder sind natürlich leicht asymmetrische Gitterkonstanten $\epsilon, \tau > 0$ zulässig.

viii) Zusammen mit der in Anhang A bewiesenen Ungleichung ($g^2 > 0$)

$$\sigma_q^{(W)} \geq \sigma_q^{(P)} \geq \tilde{\sigma}_q^{(P)}$$

ist die am Ende von Abschnitt 1.1 versprochene Gleichheit von $\sigma_q^{(P)}$, $\tilde{\sigma}_q^{(P)}$ und $\sigma_q^{(W)}$ damit für große $g^2 > 0$ bewiesen.

Mit diesen Bemerkungen möchte ich dieses Kapitel abschließen.

KAPITEL 3

GITTEREICHTHEORIEN MIT KONTINUIERLICHER ZEIT

In diesem Kapitel betrachte ich die Gittereichtheorien von Kogut und Susskind [1975]. Ziel wird es sein, die Methode der Polymerentwicklungen die sich für die Theorie auf dem symmetrischen Raum-Zeit-Gitter als sehr fruchtbar erwiesen hat, auf die Gittereichtheorien mit kontinuierlicher Zeit zu übertragen.

Nach einem einführenden Abschnitt, in dem insbesondere die Existenz eines Hamiltonoperators $H \geq 0$ im thermodynamischen Limes und die Lokalisierungseigenschaften der Zeitentwicklung diskutiert werden, betrachte ich die stark gekoppelte Theorie. Für beliebige Temperaturen $\beta^{-1} \geq 0$ zeige ich Confinement im Sinne von Polyakov, Flächen-Gesetz für horizontale Wilson-Loops und exponentielles Clustern, vorausgesetzt $\text{Re } g^2$ ist hinreichend groß (Abschnitt 3.2 und 3.3; die entsprechende Schranke g^2 an die kritische Kopplung hängt von β ab).

Für endliche Gruppen (aus technischen Gründen muß ich mich auf endliche abelsche Gruppen beschränken) kann man, zumindestens bei hoher Temperatur, drei Phasen unterscheiden: die Confinement-Phase mit Confinement im Sinne von Polyakov und Flächen-Gesetz für horizontale Wilson-Loops (siehe oben), die Deconfinement-Phase mit Deconfinement aber weiter gültigem flächen-Gesetz ([Borgs, Seiler, 1983], [Borgs, 1985]) und schließlich die eingefrorene oder "Freezing"-Phase mit Deconfinement im Sinne von Polyakov und Umfangs-Gesetz für horizontale Wilson-Loops (Abschnitt 3.4).

Im Abschnitt 3.5 fasse ich die Ergebnisse aus 3.2 bis 3.4 zusammen und diskutiere die resultierenden Phasendiagramme.

Während die Entwicklung in der "Freezing"-Phase eine Verallgemeinerung der Ginibre'schen Entwicklung [1969] ist (Ginibre behandelt das anisotrope Quanten-Heisenberg-Modell in der Tieftemperatur-Phase), hat die Entwicklung in der Confinement-Phase meines Wissens keine Vorläufer in der Literatur.

3.1 Definition der Theorie: Hamiltonoperator und Zeitentwicklung

Ich betrachte Gitter-Yang-Mills Theorien in der Formulierung von Kogut und Susskind. $\Lambda_o \subset \mathbb{L}_o := \mathbb{Z}^d$ sei ein endliches Rauggitter¹, $\Lambda_o^1, \Lambda_o^{1+}$, etc. seien wie in Abschnitt 1.1 definiert. Als Eichgruppe wähle ich entweder eine endliche Gruppe G (z.B. $G = \mathbb{Z}_N$) oder eine kompakte Liegruppe (z.B. $G = \text{SU}(N)$ oder $G = \text{U}(N)$). Der klassische Konfigurationsraum besteht aus den Abbildungen g von Λ_o^{1+} nach G : $\langle xy \rangle \mapsto g_{xy}$. Für $\langle yx \rangle \in \Lambda_o^{1+}$ setzt man $g_{xy} := g_{yx}^{-1}$. Für eine Teilmenge $L \subset \Lambda_o^{1+}$ bezeichnet dg_L das Produkt-Haarmaß

$$dg_L := \prod_{\ell \in L} dg_\ell \quad (3.1)$$

Statt $dg_{\Lambda_o^{1+}}$ schreibe ich einfach dg_{Λ_o} oder dg . Der physikalische Hilbertraum $\mathcal{H}_{\Lambda}$ ist der Hilbertraum der eichinvarianten bzgl. dg_{Λ_o} quadrat-integralen Funktionen ψ von $G^{\Lambda_o^{1+}}$ nach $\mathbb{C}$.

Es erweist sich häufig als praktisch, $\mathcal{H}_{\Lambda_o}$ als Unterraum von

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\Lambda_o} := L^2(dg_{\Lambda_o}) \quad (3.2)$$

aufzufassen: Die Eichtransformationen $g_{xy} \mapsto g_{xy}^h = h_x^{-1} g_{xy} h_y^{-1}$ induzieren eine unitäre Darstellung

$$(u(h)\psi)(g) = \psi(g^h) \quad (3.3)$$

von $\mathcal{G}_{\Lambda_o} = G^{\Lambda_o}$ auf $\tilde{\mathcal{H}}_{\Lambda_o}$. $\mathcal{H}_{\Lambda_o}$ ergibt sich aus $\tilde{\mathcal{H}}_{\Lambda_o}$ mittels

$$\mathcal{H}_{\Lambda_o} = P_o \tilde{\mathcal{H}}_{\Lambda_o} \quad (3.4)$$

¹ Die Gitterkonstante ϵ sei in diesem Kapitel gleich eins gesetzt.

wobei P_0 die Projektion auf die eichinvarianten Wellenfunktionen ist

$$P_0 = \int_{x \in \Lambda_0} \pi_x dh_x U(h) \quad (3.5)$$

Zur Definition des Hamiltonoperators H_{Λ_0} wähle man zunächst eine treue Darstellung von G aus. $\chi(\cdot)$ bezeichne die Spur in dieser Darstellung und $d(\cdot, \cdot)$ die durch χ induzierte Metrik

$$d(g, h) = \sqrt{2(\chi(1) - \operatorname{Re} \chi(gh^{-1}))}$$

Für endliche Gruppen G sei Δ_{xy} der diskretisierte Laplace-Operator ($d_0 = \min_{g \neq 1} d(g, 1)$)

$$\begin{aligned} (\Delta_{xy} \psi_{xy})(g_{xy}) &:= \\ &= \sum_{h_{xy}: d(h_{xy}, g_{xy}) = d_0} \frac{\psi_{xy}(g_{xy}) - \psi_{xy}(h_{xy})}{d_0^2}, \end{aligned}$$

Für kompakte Liegruppen sei Δ_{xy} der Laplace-Beltrami-Operator bzgl. der durch d induzierten Riemann'schen Metrik. Der Hamiltonoperator H_{Λ_0} ist nun als $H_{\Lambda_0}^{(0)} + V_{\Lambda_0}$ definiert, mit dem kinetischen Term

$$H_{\Lambda_0}^{(0)} = \sum_{\langle xy \rangle \in \Lambda_0^{1+}} H_{xy}^{(0)} \quad (3.6)$$

$$H_{xy}^{(0)} = \frac{g^2}{2} \Delta_{xy}$$

und dem Potential

$$V_{\Lambda_0} = \sum_{p \in \Lambda_0^{++}} V(p) \quad (3.7)$$

$$V(p) = - \frac{2}{g^2} \operatorname{Re} \chi(g_p)$$

Der kinetische Term entspricht dem Term E^2 (dem Quadrat des elektrischen Feldes) und das Potential dem Term B^2 (dem Quadrat des magnetischen Feldes) im Hamiltonoperator $\frac{1}{2}(E^2 + B^2)$ der Kontinuums-theorie.

Bemerkungen:

i) H_{Λ_0} vertauscht mit P_0 .

ii) Es sei $g^2 > 0$. Dann sind $e^{-\beta H_{\Lambda_0}}$ und $P_0 e^{-\beta H_{\Lambda_0}}$ für alle $\beta > 0$ positive Spurklasse-Operatoren mit strikt positivem Kern und es ist $\|e^{-\beta H_{\Lambda_0}}\| = \|P_0 e^{-\beta H_{\Lambda_0}}\| > 0$.

Beweis der Bemerkung ii) vgl. auch [Simon, Yaffe, 1982]).

$e^{-\beta H_{\Lambda_0}}$ und $P_0 e^{-\beta H_{\Lambda_0}}$ sind offensichtlich positiv. Aus der Tatsache, daß $e^{-\beta H_{\Lambda_0}^{(0)}}$ Spurklasse-Operator mit strikt positivem Kern ist, folgen die entsprechenden Aussagen für $e^{-\beta H_{\Lambda_0}}$ mittels Hölder-Ungleichung und Trotter-Formel. Es sei ψ Eigenvektor von $e^{-\beta H_{\Lambda_0}}$ mit Eigenwert $\|e^{-\beta H_{\Lambda_0}}\|$. Wegen i) kann ψ so gewählt werden, daß ψ auch Eigenvektor von P_0 ist. Aufgrund des Perron-Frobenius-Theorems kann ψ so gewählt werden, daß $\psi(g) > 0$ ist. Dann kann aber $P_0 \psi$ nicht Null sein. Also ist $P_0 \psi = \psi$ und somit $\|e^{-\beta H_{\Lambda_0}}\| = \|P_0 e^{-\beta H_{\Lambda_0}}\|$. ■

Als nächstes führe ich den Begriff der lokalen Observable ein. Man definiert die Algebra $\mathcal{A}_{\Lambda_0}$ der Observablen in Λ_0 als die Algebra der beschränkten Operatoren A in $\tilde{\mathcal{A}}_{\Lambda_0}$, die mit allen Eichtransformationen $U(h)$ vertauschen. Für $\Lambda_0 \subset \Lambda_0'$ läßt sich $\mathcal{A}_{\Lambda_0}$ dann als Unter-algebra von $\mathcal{A}_{\Lambda_0'}$ auffassen. Die Algebra der lokalen Observablen ist definiert als

$$\alpha := \bigcup_{\Lambda_0} \alpha_{\Lambda_0}$$

wobei die Vereinigung über alle endlichen $\Lambda_0 \subset \mathbb{Z}^d$ geht. Ich definiere schließlich, einem verbreiteten Mißbrauch folgend, den Träger $\text{supp}(A)$ einer lokalen Observablen A als die Menge aller $\ell \in \mathbb{L}_0^{1+}$, für die es einen beschränkten Operator B_ℓ in $L^2(\text{dq}_\ell)$ gibt, der nicht mit A vertauscht. Wenn A eine lokale Observable mit Träger $L \subset \Lambda_0^{1+}$ ist, läßt sich A , aufgefaßt als Operator über $\tilde{\mathcal{X}}_{\Lambda_0}$, nach dem Schur'schen Lemma offenbar als $\mathbb{L} \times A'$ schreiben, mit einem beschränkten Operator A' in $\tilde{\mathcal{X}}(L) = L^2(\text{dq}_L)$ und der Eins in $\tilde{\mathcal{X}}(\Lambda_0^{1+} \setminus L)$. Ich werde meist nicht zwischen A und A' unterscheiden und beide mit A bezeichnen.

Für eine lokale Observable A definiert man den Erwartungswert $\langle A \rangle_\beta$ zur inversen Temperatur $\beta < \infty$ und den Vakuumerwartungswert $\langle A \rangle$ durch

$$\langle A \rangle_\beta := \lim_{\Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle A \rangle_{\beta, \Lambda_0} \quad (3.8)$$

$$\langle A \rangle := \lim_{\substack{\Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d \\ \beta \rightarrow \infty}} \langle A \rangle_{\beta, \Lambda_0} \quad (3.8')$$

mit

$$\langle A \rangle_{\beta, \Lambda_0} = \frac{1}{Z_{\beta, \Lambda_0}} \text{Tr}_{\mathcal{X}_{\Lambda_0}} A e^{-\beta H_{\Lambda_0}} \quad (3.9)$$

$$Z_{\beta, \Lambda_0} = \text{Tr}_{\mathcal{X}_{\Lambda_0}} e^{-\beta H_{\Lambda_0}} \quad (3.10)$$

wobei der Limes $\Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d$ wieder als Limes $L \rightarrow \infty$, $\Lambda_0 = \{x \in \mathbb{L}_0 : |x_1| \leq L\}$ zu interpretieren ist.

Anmerkung:

iii) Aufgrund der Bem. ii) ist $\langle A \rangle_{B, \Lambda_0}$ wohldefiniert (man beachte, daß

$$Z_{\beta, \Lambda_0} \geq \| P_0 e^{-\beta H_{\Lambda_0}} \|$$

ist). Die Existenz der Grenzwerte (3.8) und (3.8') wird in Abschnitt 3.2/3.3 gezeigt werden, vorausgesetzt g^2 ist hinreichend groß.

Die Konvergenz geeigneter Teilfolgen für allgemeine g^2 (vgl. Anmerkung ii), Abschnitt 1.1) läßt sich für endliche Gruppen mit Hilfe des üblichen Kompaktheitsarguments (siehe z.B. [Hugenholtz, 1972]) zeigen. Für Liegruppen bricht dieses Argument zusammen, da $\mathcal{A}$ nun nicht mehr separabel ist. Allerdings sollten sich hier die Methoden von Glimm und Jaffe [1972] anwenden lassen.

Ehe ich zur Definition des Quark-Antiquark-Potentials übergehe, möchte ich einige Bemerkungen zur Existenz des quantenmechanischen Hilbertraumes und des Hamiltonoperators im thermodynamischen Limes machen. Ich bespreche zunächst die GNS-Konstruktion (nach Gelfand, Naimark und Segal). Es sei $\mathcal{W} := \{A \in \mathcal{A} : \langle A^* A \rangle = 0\}$. Dann definiert $(A + \mathcal{W}, B + \mathcal{W}) := \langle A^* B \rangle$ ein positives Skalarprodukt auf $\mathcal{A}/\mathcal{W}$. Der physikalische Hilbertraum $\mathcal{H}$ im thermodynamischen Limes ist die Vervollständigung von $\mathcal{A}/\mathcal{W}$ bzgl. $(\cdot, \cdot)$. Für $A \in \mathcal{A}$ bezeichne ψ_A den entsprechenden Vektor aus $\mathcal{H}$. Dann definiert

$$\pi(A) \psi_B = \psi_{AB}$$

eine Darstellung π von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{H}$; und es ist $\psi_A = \pi(A) \Omega$, wobei $\Omega = \psi_{\mathbb{1}}$ ist. Man beachte schließlich, daß für $A \in \mathcal{A}$ $\langle A \rangle = (\Omega, \pi(A) \Omega)$ ist.

Um den Hamiltonoperator H in $\mathcal{H}$ zu definieren, wähle ich eine Vorgehensweise, die viele Ähnlichkeiten mit der Osterwalder-Schrader Rekonstruktion [1973, 1975] hat. Für $A, B \in \mathcal{A}$ und für $t \geq 0$ sei

$$\omega_{it}(A, B) := \lim_{\substack{\Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d \\ \beta \rightarrow \infty}} \omega_{it}^{\beta, \Lambda_0}(A, B) \quad (3.11)$$

wobei für $t < \beta$ und für $A, B \in \mathcal{X}$

$$\omega_{it}^{\beta, \lambda_0}(A, B) = \frac{1}{Z_{\beta, \lambda_0}} \operatorname{Tr}_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} A^* e^{-tH_{\lambda_0}} B e^{-(\beta-t)H_{\lambda_0}} \quad (3.12)$$

ist. Bezüglich der Existenz des Limes (3.11) gilt mutatis mutandis Anmerkung iii). Man beachte, daß $\forall t_1, t_2 \geq 0$

$$\sigma \leq \omega_{i \frac{t_1+t_2}{2}}(A, A) \leq \sqrt{\omega_{it_1}(A, A) \omega_{it_2}(A, A)}$$

ist². Da $\omega_{it}(A, A) < \|A\|^2$ ist, folgt die Monotonie von $\omega_{it}(A, A)$:
 $\omega_{it}(A, A) \leq \omega_{it'}(A, A)$ für $0 \leq t' \leq t$. Man definiert nun einen Operator $T(t)$ in $\mathcal{X}$ durch ($t \geq 0$):

$$(\psi_A, T(t) \psi_B) = \omega_{it}(A, B)$$

Offenbar ist dann $0 \leq T(t) \leq 1$ und $\forall s, t \geq 0$ ist $T(t+s) = T(t)T(s)$.

Ferner ist Ω Eigenvektor von $T(t)$ zum Eigenwert $1 = \|T(t)\|$

Lemma 3.1:

$\forall A \in \mathcal{X}$ sei $\lim_{t \rightarrow 0} \omega_{it}(A, A) = \langle A^* A \rangle$. Dann gibt es einen

selbstadjungierten Operator $H \geq 0$, so daß $\forall t \geq 0$

$$T(t) = e^{-tH}$$

und $H\Omega = 0$ ist.

Beweis:

Aufgrund der Voraussetzung geht für alle Vektoren ψ aus einer dichten Teilmenge $D \subset \mathcal{X}$ ($\psi, T(t)\psi$) für $t \rightarrow 0$ gegen (ψ, ψ) . Hieraus folgt, daß

² $q^2 > 0$ ist hier, wie schon in der Definition von $\mathcal{X}$, stets vorausgesetzt.

$$\begin{aligned} \|T(t)\psi - \psi\|^2 &= \\ &= (\psi, T(2t)\psi) - 2(\psi, T(t)\psi) + (\psi, \psi) \end{aligned}$$

für $t \rightarrow 0$ gegen Null geht. Also geht $T(t)$ für $t \rightarrow 0$ stark gegen 1 . H ist der Generator der stark stetigen Halbgruppe von Kontraktionen $\{T(t): t \geq 0\}$ (siehe z.B. [Reed, Simon, 1975]). Da $T(t) \leq 1$ ist, ist $H \geq 0$. Wegen $T(t)\Omega = \Omega$ ist $H\Omega = 0$. ■

Anmerkung:

iv) Die in Abschnitt 3.2/3.3 hergeleitete Clusterentwicklung wird es ermöglichen, die in Lemma 3.1 benötigte Stetigkeitsannahme zu beweisen, vorausgesetzt, g^2 ist groß genug.

Lemma 3.2:

Für endliche Gruppen G ist $T(t) = e^{-tH}$ mit $H \geq 0$ und $H\Omega = 0$, sofern nur $g^2 > 0$ ist.

Beweis:

Da G endlich ist, sind sowohl $H_{xy}^{(0)}$ als auch $V(p)$ beschränkte Operatoren. Es folgt, daß die Potenzreihenentwicklung von

$$\alpha_t^{\Lambda_0}(A) = e^{itH_{\Lambda_0}} A e^{-itH_{\Lambda_0}}$$

um $t = 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$ und $\forall t \in \mathbb{C}$ mit $|t| < t_0$ konvergiert, mit einer von A und Λ_0 unabhängigen Konstanten $t_0 > 0$ (vgl. [Streater, 1967] und [Robinson, 1968]). Die Konvergenz ist gleichmäßig in Λ_0 . Man zeigt nun leicht, daß $\forall A \in \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{C}$ mit $|t| < t_0$

$$\alpha_t(A) := \text{norm} \lim_{\Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d} \alpha_{it}^{\Lambda_0}(A)$$

existiert, und zwar als Element von $\bar{\alpha}$, dem Norm-Abschluß von α ,
und daß $\forall A \in \alpha$

$$A = \text{norm} \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_t(A) = \text{norm} \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_{it}(A)$$

ist. Hieraus folgt mit Lemma 3.1 sofort die Behauptung, da für $t < t_0$

$$\begin{aligned} |\omega_{it}(A, A) - \langle A^* A \rangle| &= \\ &= |\langle A^*(\alpha_{it}(A) - A) \rangle| \leq \|A^*\| \|\alpha_{it}(A) - A\| \end{aligned}$$

ist. ■

Anmerkungen:

v) Die im vorigem Beweis definierte Zeitentwicklung ist kein Automorphismus auf α , da für $A \in \alpha$ $\alpha_t(A) \in \bar{\alpha}$ i.a. keine lokale Observable ist. Es zeigt sich jedoch (vergleiche [Streater, 1967] und [Robinson, 1968]), daß $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige Gruppe von Automorphismen auf $\bar{\alpha}$ ist. Die Zeitentwicklung ist für endliche Gruppen also quasi-lokal. Inwiefern $\bar{\alpha}$, der Norm-Abschluß von α , oder der schwache Abschluß α'' von α für kontinuierliche Gruppen invariant unter α_t ist, ist eine offene Frage. In jedem Fall wird auch hier die Zeitentwicklung nicht strikt lokal sein.

vi) Es ist nicht verwunderlich, daß die quantenmechanische Zeitentwicklung im τ -Kontinuum nicht strikt lokal ist. Denn schon die in Raum-, aber nicht in Zeitrichtung diskretisierte klassische Wellengleichung zeigt ein ähnliches Verhalten. Physikalisch ist dies aber befremdend, widersprechen sich instantan bis ins Unendliche ausbreitende Wechselwirkungen doch der Einstein-Kausalität. Dies ist offensichtlich ein unphysikalischer Zug der Theorie von Kogut und Susskind.

Auf den ersten Blick scheint die Theorie auf einem symmetrischen Gitter hier Vorteile zu bieten; denn α_{it} (hier muß à priori t natürlich ein Vielfaches der Gitterkonstanten sein) führt nun lokale Observablen

wieder in lokale Observable über. Der erste Blick täuscht hier allerdings. Denn physikalisch bedeutsam ist die reelle Zeitentwicklung α_t . Und die dürfte auch in der Wilson'schen Theorie höchstens quasi-lokal sein.

Ich möchte schließlich noch das Quark-Antiquark Potential F_{qq}^β definieren. Man betrachte hierzu den Hilbertraum $\tilde{\mathcal{X}}_{1_0}$ und die Darstellung $U(\cdot)$ von $\mathcal{G}_{1_0} = G^{1_0}$ auf $\tilde{\mathcal{X}}_{1_0}$. Zerlegen von $U(\cdot)$ in irreduzible Darstellungen liefert die Zerlegung

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{X}}_{1_0} &= \bigoplus_{\{Q_x\}} \mathcal{X}_{\{Q_x\}} \\ \mathcal{X}_{\{Q_x\}} &= P_{\{Q_x\}} \tilde{\mathcal{X}}_{1_0}\end{aligned}\tag{3.13}$$

mit

$$P_{\{Q_x\}} = \int \left(\prod_{x \in 1_0} dh_x \chi_{Q_x}(1) \overline{\chi_{Q_x}(h_x)} \right) U(\underline{h})$$

Man sagt: $\mathcal{X}_{\{Q_x\}}$ ist der Unterraum mit den (äußeren) Ladungen $\{Q_x\}$. Da $U(\underline{h})$ mit $e^{itH_{1_0}}$ vertauscht, ist auch

$$[e^{itH_{1_0}}, P_{\{Q_x\}}] = 0\tag{3.14}$$

Die äußeren Ladungen "bewegen sich also nicht". Man nennt sie deshalb auch "unendlich schwer".

Neben dem schon betrachteten Hilbertraum $\tilde{\mathcal{X}}_{1_0}$ ohne äußere Ladungen ist noch der Hilbertraum $\mathcal{X}_{\{Q_x\}}$ für den

$$Q_{x'} = \begin{cases} q & x' = x \\ \bar{q} & x' = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist (0 bezeichnet die triviale Darstellung) von besonderem Interesse.

Ich bezeichne ihn mit $\mathcal{X}_{q(x)} \bar{q}(y)$ und die entsprechende Projektion mit

$P_{q(x)\bar{q}(y)}$. Es liegt nahe, ein (temperaturabhängiges) Quark-Antiquark-Potential $F_{q\bar{q}}^{\beta}$ (x, y) durch

$$F_{q\bar{q}}^{\beta}(x, y) = \lim_{\Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d} F_{q\bar{q}}^{\beta, \Lambda_0}(x, y) \quad (3.15)$$

$$F_{q\bar{q}}^{\beta, \Lambda_0}(x, y) = -\frac{1}{\beta} \log G_{q\bar{q}}^{\beta, \Lambda_0}(x, y) \quad (3.16)$$

$$G_{q\bar{q}}^{\beta, \Lambda_0}(x, y) = Z_{q(x)\bar{q}(y)}^{\beta, \Lambda_0} / Z_{\beta, \Lambda_0}$$

zu definieren, wobei die Zustandssumme Z_{β, Λ_0} des "Systems ohne Quarks" durch (3.10) und die Zustandssumme des Systems "mit einem Quark q an der Stelle x und einem Antiquark $\bar{q}$ an der Stelle y " durch

$$Z_{q(x)\bar{q}(y)}^{\beta, \Lambda_0} = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{q(x)\bar{q}(y)}} e^{-\beta H_{\Lambda_0}} \quad (3.17)$$

definiert ist. Ich möchte für den Rest dieses Abschnitts annehmen, daß der Limes (3.15) existiert und translationsinvariant ist

$$F_{q\bar{q}}^{\beta}(x, y) = F_{q\bar{q}}^{\beta}(y-x)$$

Ebenso wie in der Wilson'schen Theorie spricht man auch hier von linearem Confinement, wenn $F_{q\bar{q}}^{\beta}$ für $|x - y| \rightarrow \infty$ linear mit $|x - y|$ wächst. Insbesondere definiert man die Saitenspannung

$$\sigma_{q, \beta}^{(P)} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} F_{q\bar{q}}^{\beta}(\ell \hat{e}_1) \quad (3.18)$$

wobei $\hat{e}_1$ der Einheitsvektor in der 1-Richtung ist. Wenn $F_{q\bar{q}}^{\beta}(x - y)$ für $|x - y| \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt, spricht man von Deconfinement.

Anmerkung:

vii) Die obige Betrachtungsweise des Confinementproblems geht auf Polyakov [1978] zurück. Ich werde deshalb auch von Confinement bzw. Deconfinement im Sinne von Polyakov sprechen.

Zum Schluß dieses Abschnitts möchte ich noch erwähnen, daß die Gittereichtheorie gemäß Wilson im Limes kontinuierlicher Zeit in die Theorie von Kogut und Susskind übergeht: es sei $T_{\Lambda_0, \tau}$ der Transfermatrix der Wilson'schen Theorie mit Gitterkonstante τ in Zeitrichtung. Da $T_{\Lambda_0, \tau}$ beschränkt und strikt positiv ist, kann man einen (τ -abhängigen) Hamiltonoperator $H_{\Lambda_0, \tau}$ durch

$$H_{\Lambda_0, \tau} = - \frac{1}{\tau} \log T_{\Lambda_0, \tau}$$

definieren. Sofern G eine kompakte Liegruppe ist und J_e und J_m wie in Abschnitt 1.1 gewählt sind, ist $\forall \beta > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} e^{-\beta H_{\Lambda_0, \tau}} = e^{-\beta H_{\Lambda_0}}$$

in der Spurnorm $\|\cdot\|_{J_1} = \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\Lambda_0}} |\cdot|$ [Borgs, Seiler 1983].

Anmerkung:

viii) Die Tatsache, daß die Wilson'sche Theorie im τ -Kontinuum-Limes in die Theorie von Kogut und Susskind übergeht, wurde zum ersten Mal von Creutz gezeigt [1977]. Seine Ergebnisse implizieren im wesentlichen die starke Konvergenz von $e^{-\beta H_{\Lambda_0, \tau}}$; siehe auch [Gawedzki, 1982].

ix) Für endliche Gruppen ist J_e so zu skalieren, daß

$$e^{-J_e d_0^2 / 2} = \frac{\tau g^2}{2 d_0^2} (1 + o(\tau))$$

ist. J_m wähle man wie gehabt.

Beweis der Anmerkung ix)

Es sei t_τ der Operator in $L^2(dg)$ mit Kern

$$t_\tau(g, h) = e^{\tau(\operatorname{Re} \chi(gh^{-1}) - \chi(1))} = e^{-\frac{\tau d^2(g, h)}{2}}$$

Man zeigt dann leicht (per Fourier-Transformation), daß der (starke)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (t_\tau / \|t_\tau\|)^{1/\tau} = e^{-\frac{q^2}{2} \Delta}$$

ist, wenn

$$e^{-\tau d_o^2/2} = \frac{\tau q^2}{2 d_o^2} (1 + o(\tau))$$

ist. Aus der starken Konvergenz folgt für endliche Gruppen sofort die Spurnorm-Konvergenz. Das weitere Vorgehen ist dasselbe wie in [Borgs, Seiler, 1983]. ■

3.2 Die Clusterentwicklung für große g^2

In diesem Abschnitt werde ich eine Clusterentwicklung herleiten, die es erlaubt, die Existenz einer Confinementphase für große g^2 (wie groß, hängt von der Temperatur $1/\beta$ ab) zu zeigen. Die Idee wird es sein, den Kern von

$$T = e^{-(\beta/N) H_{\Lambda_0}} \quad (3.19)$$

um eins zu entwickeln, wobei N eine (später zu wählende) natürliche Zahl ist. Ich betrachte zunächst die Zustandssumme

$$Z_{\beta, \Lambda_0} = \text{Tr}_{\tilde{\alpha}_{\Lambda_0}} P_0 T^N = \text{Tr}_{\tilde{\alpha}_{\Lambda_0}} (P_0 T)^N \quad (3.20)$$

$$= \int \prod_{t=1}^N dq_t \prod_{t=1}^N dh_{\sim t} \prod_{t=1}^N T(q_t^{h_t}, q_{t+1})$$

wobei q_{N+1} als q_1 zu lesen ist. Es erweist sich als praktisch, die Abkürzungen

$$D_{xy} = -\frac{\beta}{N} \frac{q^2}{2} \Delta_{xy}$$

$$D(L) = \sum_{\langle xy \rangle \in L} D_{xy} \quad (3.21)$$

$$W_p = \frac{\beta}{N} \frac{2}{q^2} \text{Re } \chi(q_p)$$

$$W(P) = \sum_{p \in P} W_p$$

einzuführen³. Hiermit schreibt sich T als

$$T = e^{D(\Lambda_0^{1+}) + W(\Lambda_0^{2+})} = e^{D+W}$$

Um die Idee der hier herzuleitenden Entwicklung zu erläutern, betrachte ich zunächst den Kern von

$$T^{(0)} = e^{D(\Lambda_0^{1+})}$$

der sich offenbar wie folgt als Produkt schreibt

$$T^{(0)}(g, g') = \prod_{\ell \in \Lambda_0^{1+}} T_\ell^{(0)}(g_\ell, g'_\ell)$$

($T_\ell^{(0)} := e^{D_\ell}$). Da $T^{(0)}(g, g')$ für große Kopplungen g^2 nur sehr wenig von 1 abweicht, liegt es nahe $T^{(0)}(g, g')$ in folgender Weise um 1 zu entwickeln

$$T^{(0)}(g, g') = \sum_{L \subset \Lambda_0^{1+}} \prod_{\ell \in L} K_\ell(g_\ell, g'_\ell) \quad (3.22)$$

mit

$$K_\ell(g_\ell, g'_\ell) = T_\ell^{(0)}(g_\ell, g'_\ell) - 1 \quad (3.23)$$

In (3.20) tritt jedoch nicht der Kern von $T^{(0)}$ sondern der Kern von T auf. Zur Berücksichtigung des Potentialterms W , der den Unterschied zwischen T und $T^{(0)}$ ausmacht, verwende ich die sogenannte Duhamel-Entwicklung (siehe z.B. [Seiler, Simon, 1976]):

³ Statt $D(\Lambda_0^{1+})$ schreibe ich häufig einfach D , statt $W(\Lambda_0^{2+})$ schreibe ich häufig W . Außerdem bezeichne ich D_{xy} für $\ell = \langle xy \rangle$ häufig auch mit D_ℓ .

$$e^{D+W} = e^{D + \sum_{n \in \Lambda_0^{1+}} W_n} \quad (3.24)$$

$$= \left[\prod_{n \in \Lambda_0^{1+}} \left(\sum_{n_p=0}^{\infty} \frac{1}{n_p!} \int_0^1 dt_p^1 \dots dt_p^{n_p} \right) \right] T(\underline{t})$$

Hier geht $T(\underline{t})$ aus $T^{(0)}$ durch "Einfügen" von W_p zu den Zeiten $t_p^1, \dots, t_p^{n_p}$ hervor. Formal läßt sich dies wie folgt beschreiben: Es seien $p_1, \dots, p_\ell$ die Plaketten in Λ_0^{1+} , n_i stehe für n_{p_i} und n sei gleich der Summe $n_1 + \dots + n_\ell$. Man wähle nun eine Umordnung

$$(s_1, \dots, s_n) = \pi((t_{p_1}^1, \dots, t_{p_1}^{n_1}, \dots, t_{p_\ell}^1, \dots, t_{p_\ell}^{n_\ell}))$$

von $t_{p_1}^1, \dots, t_{p_\ell}^{n_\ell}$, für die gilt

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$$

Es sei schließlich

$$(p'_1, \dots, p'_n) = \pi(\underbrace{p_1, \dots, p_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{p_\ell, \dots, p_\ell}_{n_\ell})$$

wobei p_k auf der rechten Seite genau n_k mal vorkommt ($k = 1, \dots, \ell$). Dann ist

$$T(\underline{t}) = e^{\rho_1 D(\Lambda_0^{1+})} w_{p'_1} e^{(\rho_2 - \rho_1) D(\Lambda_0^{1+})} \dots$$

$$\dots e^{(\rho_n - \rho_{n-1})} w_{p'_n} e^{(1 - \rho_n) D(\Lambda_0^{1+})} \quad (3.25)$$

Im nächsten Schritt summiere ich (3.24) um:

$$e^{D+W} = \sum_{P \in \Lambda_0^{1+}} T(P) \quad (3.26)$$

mit

$$T(P) = \left[\prod_{p \in P} \left(\sum_{n_p=1}^{\infty} \frac{1}{n_p!} \int_0^1 dt_p^1 \dots dt_p^{n_p} \right) \right] T(\tilde{t}) \quad (3.27)$$

Der Kern von $T(P)$ besitzt nun offenbar die folgende Faktorisierungseigenschaft: Es sei $L(P)$ die Menge der n.N. Paare $\ell \in \Lambda_0^{1+}$, für die es eine Plakette $p \in P$ mit $\ell \in \partial p$ oder $-\ell \in \partial p$ gibt; $L^C(P) := \Lambda_0^{1+} \setminus L(P)$ und $P_1, \dots, P_n$ seien die Zusammenhangskomponenten von P (schreibe $P_i \in \mathcal{Z}(P)$). Für $L \subset \Lambda_0^{1+}$ sei $T_L^{(0)}$ der Operator mit Kern

$$T_L^{(0)}(q, q') = \prod_{\ell \in L} T_{\ell}(q_{\ell}, q'_{\ell}) \quad (3.28)$$

und $T_L(\tilde{t})$ gehe aus (3.25) durch Ersetzen von $D(\Lambda_0^{1+})$ durch $D(L)$ hervor. $T_L(P)$ sei analog definiert. Ich führe die Abkürzung

$$K(P)(q, q') = T_{L(P)}(P)(q, q') \quad (3.29)$$

ein. Dann ist

$$\begin{aligned} T(P)(q, q') &= \\ &= \prod_{P_i \in \mathcal{Z}(P)} K(P_i)(q, q') \prod_{\ell \in L^C(P)} T_{\ell}(q_{\ell}, q'_{\ell}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Man beachte, daß $K(P)(q, q')$ nur von q_{ℓ} oder q'_{ℓ} abhängt, wenn $\ell \in L(P)$ ist.

In (3.30) entwickle ich nun noch die Kerne $T_{\ell}(\cdot, \cdot)$ für $\ell \in L^C(P)$ um 1. Es ergibt sich schließlich die Entwicklung

$$T(q, q') = \quad (3.31)$$

$$\sum_{\substack{P \subset \Lambda_0^{2+} \\ L \subset L^C(P)}} \prod_{P_i \in \mathcal{Z}(P)} K(P_i)(q, q') \prod_{\ell \in L} K_{\ell}(q_{\ell}, q'_{\ell})$$

Einsetzen in (3.20) liefert die gesuchte Darstellung von Z_{β, Λ_0} als Zustandssumme eines Polymersystems, wobei die Polymere aus zeitartigen Plaketten und Würfeln aus $\Lambda = \{1, \dots, N\} \times \Lambda_0$ aufgebaut werden. Etwas genauer definiere ich (Λ_v^{2+} resp. Λ_v^{3+} bezeichne die Menge der positiv orientierten zeitartigen Plaketten resp. Würfel aus Λ ; "v" steht für "vertikal"):

Definition 3.1:

Es seien $e, e' \in \Lambda_v^{2+} \cup \Lambda_v^{3+}$. Dann heißen e und e' inkompatibel (oder auch zusammenhängend), wenn sie mindestens ein gemeinsames "Link" haben. Für eine Menge $W \subset \Lambda_v^{3+}$ bezeichne $P(W)$ die Menge der Plaketten $p \in \Lambda_v^{2+}$, für die es mindestens einen Würfel $w \in W$ mit $p \in \partial w$ oder $-p \in \partial w$ gibt; $P^C(W) := \Lambda_v^{2+} \setminus P(W)$.

Ein geordnetes Paar $\gamma = (W, P)$ mit $W \subset \Lambda_v^{3+}$, $P \subset \Lambda_v^{2+}$ heißt Polymer, wenn $P \subset P^C(W)$ ist und $P \cup W$ eine zusammenhängende Menge ist. Zwei Polymere $\gamma = (W, P)$ $\gamma' = (W', P')$ heißen inkompatibel (schreibe $\gamma \sim \gamma'$) wenn $P \cup W \cup P' \cup W'$ eine zusammenhängende Menge ist. Andernfalls heißen γ und γ' kompatibel (schreibe $\gamma \sim \gamma'$).

Für jede Plakette $p \in \Lambda_v^{2+}$ gibt es genau eine Zeit $t \in \{1, \dots, N\}$ und ein n.N. Paar $\langle xy \rangle \in \Lambda_0^{1+}$, so daß $p = ((x, t), (y, t), (y, t+1), (x, t+1))$ ist. Ich bezeichne t bzw. $\langle xy \rangle$ mit $t(p)$ bzw. $\ell(p)$. Für einen Würfel $w \in \Lambda_v^{3+}$ definiere ich $t(w) \in \{1, \dots, N\}$ und $p(w) \in \Lambda_0^{2+}$ analog.

Um die Aktivität eines Polymers $\gamma = (W, P)$ zu definieren, zerlege ich γ in Zeitschichten $\gamma_1 = (W_1, P_1), \dots, \gamma_N = (W_N, P_N)$, wobei W_t resp. P_t aus denjenigen Plaketten bzw. Würfeln aus W resp. P besteht, denen die Zeit t zugeordnet ist. W_t resp. P_t werden dann vermittle der oben definierten Funktion $\ell(\cdot)$ resp. $p(\cdot)$ auf Mengen von n.N. Paaren $\mathcal{L}(P_t)$ resp. Plaketten $p(W_t)$ abgebildet. Ich definiere nun

$$\varphi(\gamma) = \prod_{t=1}^N (\varphi(W_t) \varphi(P_t)) \quad (3.32)$$

$$\varphi(W_t) = \prod_{p \in \mathcal{L}(p(W_t))} K(p) (g_t^h, g_{t+1}) \quad (3.33)$$

$$\varphi(P_t) = \prod_{\langle xy \rangle \in \mathcal{L}(P_t)} K_{xy}(h_{xt}^{-1} g_{xyt} h_{yt}, g_{xy(t+1)}) \quad (3.34)$$

Vermittels (3.31) ist dann offenbar

$$\begin{aligned} \prod_{t=1}^N T(g_t^{h_t}, g_{t+1}) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}^c \prod_{i=1}^n \varphi(\gamma_i) \end{aligned} \quad (3.35)$$

wobei die Summe $\sum^c$ über Mengen von paarweise kompatiblen Polymeren geht. (3.20) und (3.25) ergeben die gewünschte Darstellung von Z_{β, Λ_0} als Zustandssumme eines Polymersystems:

$$Z_{\beta, \Lambda_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}^c \prod_{i=1}^n z(\gamma_i) \quad (3.36)$$

wobei

$$z(\gamma_i) = \int \varphi(\gamma_i) \prod_{t=1}^N dg_t \prod_{t=1}^N dh_t \quad (3.37)$$

ist. (Man beachte, daß $\varphi(\gamma_i)$ und $\varphi(\gamma_j)$ für $\gamma_i \sim \gamma_j$ keine gemeinsamen Variablen besitzen).

Ehe ich die Erwartungswerte von Observable $A \in \mathcal{A}_{\Lambda_0}$ betrachte, möchte ich (3.31) als eine Gleichung zwischen Operatoren schreiben. Für $\ell \in \Lambda_0^{1+}$ definiere ich zunächst die Operatoren K_ℓ resp. Q_ℓ als die Integraloperatoren in $L^2(dg_\ell)$ mit Kern $K_\ell(g_\ell, g'_\ell)$ resp. 1. Man beachte, daß Q die Projektion auf die konstanten Funktionen in $L^2(dg_\ell)$ ist, und daß $T_\ell = Q_\ell + K_\ell$ ist. Weiter definiere ich für $P \subset \Lambda_0^{2+}$ $K(P)$ als den Integraloperator in $L^2(dg_{L(P)})$ mit Kern $K(P)(g, g')$. Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\substack{P \subset \Lambda_0^{2+} \\ L \subset L^c(P)}} T(L, P) \end{aligned} \quad (3.38)$$

mit

$$T(L, P) = \left[\bigotimes_{\ell \in L} K_\ell \right] \otimes \quad (3.39)$$

$$\bigotimes_{P_i \in \mathcal{Z}(P)} \left[\bigotimes_{\ell \in L^c(P)} K(P_i) \right] \otimes \left[\bigotimes_{\ell \in L^c(P) \setminus L} Q_\ell \right]$$

Vermittels (3.39) ergibt sich eine alternative Darstellung der Aktivität eines Polymers γ : Es seien $\gamma_1 = (w_1, P_1), \dots, \gamma_N = (w_N, P_N)$ die Zeitschichten von γ . Dann ist

$$Z(\gamma) = \text{Tr} \prod_{t=1}^N \left(P_o T(\ell(P_t), p(w_t)) \right) \quad (3.40)$$

Um eine Clusterentwicklung für $\langle A \rangle_{\beta, \Lambda_o}$ herzuleiten ($A \in \mathcal{A}_{\Lambda_o}$), betrachte ich wieder (vgl. Abschnitt 1.2) modifizierte Zustandssummen

$$\begin{aligned} Z(A) &:= \sum_{n_A=0,1} \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{X}}_{\Lambda_o}} P_o A^{n_A} e^{-\beta H_{\Lambda_o}} \\ &= \sum_{n_A=0,1} \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{X}}_{\Lambda_o}} (P_o A^{n_A} T) (P_o T)^{N-1} \end{aligned}$$

Vermittels (3.38) ist

$$AT = \sum_{P \in \Lambda_o^{2+}} \sum_{L \subset L^c(P)} AT(L, P) \quad (3.41)$$

Es gilt nun, die Faktorisierungseigenschaften des Kerns von $AT(L, P)$ zu untersuchen. Es sei $\mathcal{A}$ der Träger von A , $P_1, \dots, P_m$ seien diejenigen Zusammenhangskomponenten von P , die nicht mit $\mathcal{A}$ zusammenhängen;

$P_A := P \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_m)$, $L_A := L \cap \mathcal{A}$. Dann ist

$$\{AT(L, P)\}(g, g') = K_A(L_A, P_A)(g, g') \times \quad (3.42)$$

$$\times \prod_{\ell \in L \setminus L_A} K_\ell(g_\ell, g'_\ell) \prod_{i=1}^n K(P_i)(g, g')$$

wobei $K_A(L_A, P_A)(g, g')$ der Kern von $AT(L_A, P_A)$ ist. Man beachte, daß dieser nur dann von g , resp g' abhängt, wenn $\ell \in L_A \cup L(P_A)$ ist. Zum Beweis von (3.42) benutze man (3.39).

Das weitere Vorgehen ist nun offensichtlich: Polymere sind 3-Tupel $\gamma = (n_A, W, P)$ bestehend aus einer Zahl $n_A \in \{0, 1\}$ und Mengen $W \subset \bigwedge_V^{3+}$, $P \subset \bigwedge_V^{2+}$ mit folgenden Eigenschaften: entweder ist $n_A = 0$ und (W, P) ist ein Polymer gemäß Def. 3.1 (in diesem Fall heißt γ gewöhnliches Polymer) oder $n_A = 1$ und (W, P) ist die Vereinigung von paarweise kompatiblen Polymeren $(W_1, P_1) \dots (W_k, P_k)$ gemäß Definition 3.1, wobei für $i = 1, \dots, k$ $W_i \cup P_i$ mit $\tilde{\mathcal{A}}$ zusammenhängt (in diesem Fall heißt γ A-Polymer). $\tilde{\mathcal{A}}$ ist hierbei der Träger von A , aufgefaßt als Teilmenge von $\bigwedge^1$, d.h. $\tilde{\mathcal{A}}$ besteht aus den Links der Form $(t = 1, \ell)$ mit $\ell \in \text{supp } A$.

Die Aktivität eines Polymers $\gamma = (n_A, W, P)$ mit Zeitschichten $(W_1, P_1), \dots, (W_N, P_N)$ ist durch

$$z_A(\gamma) := \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{A}}_{A_0}} A^{n_A} \prod_{t=1}^N \left[P_o T(\ell(P_t), \mu(W_t)) \right] \quad (3.43)$$

definiert. Der Kompatibilitätsbegriff ist (mutatis mutandis) wie in Abschnitt 1.2 gewählt (als erweitertes Polymer bezeichne ich hier die Menge $W \cup P$ resp. $W \cup P \cup \tilde{\mathcal{A}}$, je nachdem, ob $n_A = 0$ oder 1 ist). Mit diesen Definitionen wird

$$Z(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}^c \prod_{i=1}^n z_A(\gamma_i) \quad (3.44)$$

und somit (vgl. Abschnitt 1.2)

$$\langle A \rangle_{\beta, A_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}^{\prime} \frac{\Phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_A(\gamma_i) \quad (3.45)$$

wobei die Summe $\sum^{\prime}$ über Terme linear in A geht und $\Phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ wie üblich (siehe z.B. (3.2)) definiert ist.

(3.44) ist die gesuchte Clusterentwicklung für $\langle A \rangle_{\beta, \Lambda_0}$. Da einerseits $T_{\ell}(\cdot, \cdot)$ für große Kopplungen g^2 nur sehr wenig von 1 abweicht ($\sup |K_{\ell}(g, g')|$ also klein ist), und andererseits $K(P)$ mindestens $|P|$ Faktoren w_p involviert (die jeweils eine Potenz von $1/g^2$ mit sich bringen), sollte die Entwicklung (3.44) für große g^2 konvergieren. Dies, und die resultierenden Theoreme für $\langle \cdot \rangle_{\beta}$ und $\sigma_{q, \beta}^{(P)}$, ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

Anmerkungen:

i) In [Seiler, Simon, 1976] wurde die Operator-Norm-Konvergenz der Duhamel-Entwicklung bewiesen. Zur Herleitung von (3.31) habe ich jedoch implizit die gleichmäßige Konvergenz der entsprechenden Entwicklung für die Kerne benutzt. Um dies zu beweisen, benutze man die Tatsache, daß e^{SD} einen positiven Integralkern hat⁴ und der Multiplikationsoperator w_p beschränkt ist. Es folgt, daß

$$\begin{aligned} |T(\underline{t})(g, g')| &\leq \omega^n T^{(0)}(g, g') \\ &\leq \omega^n T^{(0)}(1, 1) \end{aligned} \quad (3.46)$$

ist, mit $\omega = \|w_p\|$ und $n = \sum n_p$. Hieraus folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz von (3.24), aufgefaßt als Entwicklung für die Integralkerne. (3.31) ist somit eine (im Raum der Eichkonfigurationen $\underline{g}, \underline{g}'$) punktweise gültige Gleichung. Hieraus folgt klarerweise (3.39) als Gleichung zwischen Operatoren in $\tilde{\mathcal{A}}_{\Lambda_0}$.

⁴ ich setze hier $g^2 > \sigma$ voraus.

ii) $T^{(0)}$ ist ein Spurklasse-Operator. Hieraus folgert man mit Hilfe der Hölder-Ungleichung, daß $T(t)$ Spurklasse ist mit

$$\text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\Lambda_0}} |T(t)| \leq \omega^n \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}_{\Lambda_0}} |T^{(0)}| \quad (3.47)$$

Also sind auch $T(P)$ und $T(L, P)$ Spurklasse.

iii) Zur Rechtfertigung von (3.20) verwende man die Tatsache, daß $P_0 T$ Spurklasse ist. Es folgt, daß sowohl $P_0 T$ als auch $(P_0 T)^{N-1}$ Hilbert-Schmidt-Operatoren sind. Also ist

$$\begin{aligned} \text{Tr} (P_0 T) (P_0 T)^{N-1} &= \\ &= \int dq \, dq' (P_0 T)(q, q') ((P_0 T)^{N-1})(q', q) \end{aligned}$$

($N \geq 2$). Der Fall $N = 1$ bedarf einer gewissen Konvention, da es stets möglich ist, den Kern von $P_0 T$ auf der Diagonalen abzuändern, ohne den entsprechenden Operator zu verändern. Ich will den Kern $T(\cdot, \cdot)$ deshalb stets als

$$T(g, g') := \int dg'' T^{1/2}(g, g'') T^{1/2}(g'', g')$$

definieren. Da $T^{1/2}$ und $P_0 T^{1/2}$ Hilbert-Schmidt-Operatoren sind, ist dann

$$\begin{aligned} \text{Tr} P_0 T &= \int dq (P_0 T)(q, q) \\ &= \int dq \, dh T(q^h, q) \end{aligned}$$

Analoge Bemerkungen gelten für den Übergang von (3.37) zu (3.40).

Beweis der Anmerkungen i) und ii)

i) Da der Wärmeleitungskern $e^{SD(\lambda_0^{1+})}(\cdot, \cdot)$ für $q^2 > 0$ positiv ist, ist

$$\begin{aligned} |T(t)(q_0, q_{n+1})| &= \\ &= \left| \int \prod_{i=1}^n w_{\mu_i}(q_i) dq_i \prod_{i=0}^n e^{(s_{i+1} - s_i)D}(q_i, q_{i+1}) \right| \\ &\leq \omega^n \int \prod_{i=1}^n dq_i \prod_{i=0}^n e^{(s_{i+1} - s_i)D}(q_i, q_{i+1}) \\ &= \omega^n e^D(q_0, q_{n+1}) \end{aligned}$$

wobei $s_0 = 0$ und $s_{n+1} = 1$ ist.

ii) Vermittels der Hölder-Ungleichung ist für $q_0, \dots, q_n > 0$ mit $1/q_i = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|T(t)| &= \mathcal{T} \left| e^{s_0 D} \prod_{i=1}^n w_{\mu_i} e^{(s_{i+1} - s_i)D} \right| \\ &\leq \prod_{i=1}^n \|w_{\mu_i}\| \left\| \prod_{i=0}^n \left\{ \mathcal{T} \left| e^{q_i (s_{i+1} - s_i)D} \right| \right\}^{1/q_i} \right\| \end{aligned}$$

Die Wahl $q_i = (s_{i+1} - s_i)^{-1}$ ergibt die Behauptung. ■

3.3 Die Konvergenz der Entwicklung aus 3.2 und ihre Konsequenzen

In diesem Abschnitt werde ich die Konvergenz der Entwicklung (3.45) für große g^2 zeigen, um dann einige physikalische Eigenschaften der stark gekoppelten Theorie, wie Confinement und exponentielles Clustern, zu zeigen.

Um die Analytizitätseigenschaften der Erwartungswerte $\langle A \rangle_\beta$ zu diskutieren, erweist es sich als zweckmäßig, zunächst zwei Kopplungskonstanten μ, λ einzuführen, und

$$D_{xy} = -\lambda \Delta_{xy} \quad (3.48)$$

$$W_p = \mu \operatorname{Re} \chi(q_p)$$

zu setzen. Die Erwartungswerte von lokalen Observablen A hängen dann nicht mehr von β und g^2 , sondern von λ, μ und N ab. Ich werde sie deshalb mit

$\langle A \rangle_{N, \Lambda_0}^{\lambda, \mu}$ bezeichnen

$$\langle A \rangle_{N, \Lambda_0}^{\lambda, \mu} = \frac{1}{Z_{N, \Lambda_0}^{\lambda, \mu}} \operatorname{Tr}_{\mathcal{A}_{\Lambda_0}} e^{-N(\lambda \sum \Delta_{xy} - \mu \sum \operatorname{Re} \chi(q_p))}$$

wobei $Z_{N, \Lambda_0}^{\lambda, \mu}$ so gewählt ist, daß $\langle 1 \rangle_{N, \Lambda_0}^{\lambda, \mu} = 1$ ist. Im folgenden Lemma bezeichne ω_1 resp. ω_2 die Konstanten

$$\omega_1 := \operatorname{Tr} |e^{-\lambda \Delta_{xy}}| - 1 = \sum_{Q \neq 0} d_Q^2 e^{-(\operatorname{Re} \lambda) C_Q}$$

$$\omega_2 := e^\omega - 1 \quad \omega := \|W_p\| = |\mu| \chi(1)$$

wobei die Summe über die nicht-trivialen, irreduziblen Darstellungen von G geht und C_Q der quadratische Casimir-Operator in der Darstellung Q ist.

(Sofern die Basis $\{it_a\}$ der Lie-Algebra von G so gewählt ist, daß $\chi(L_a L_b) = \delta_{ab}$ ist, ist $c_Q = \sum_a d_Q^{-1} \chi_Q(L_a L_a)$).

Lemma 3.3:

Es sei $\tilde{\mathcal{Y}}_0 = \{(\lambda, \mu) : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ und $\gamma = (n_A, W, P)$. Dann ist $z_A(\gamma)$ als Funktion von (λ, μ) im Gebiet $\tilde{\mathcal{Y}}_0$ analytisch und es ist

$$|z_A(\gamma)| \leq \|A\|^{n_A} e^{-b|\gamma|}$$

mit $|\gamma| := |W| + |P|$ und

$$e^{-b} := \max \{ \omega_1, \omega_2 (1 + \omega_1)^4 \}$$

Beweis:

Es seien $(W'_1, P'_1), \dots, (W'_N, P'_N)$ die Zeitschichten von γ , und $P_t := p(W'_t)$, $L_t := \ell(P'_t)$. Dann ist gemäß (3.43)

$$\begin{aligned} z_A(\gamma) &= \mathcal{I}_{\mathcal{X}_{1_0}} A^{n_A} \prod_{i=1}^N T(L_i, P_i) \\ &= \left[\prod_{i=1}^N \prod_{p \in P_i} \frac{\omega}{n_i(p)=1} \frac{1}{n_i(p)} \right. \\ &\quad \left. \int dt_{i,p}^1 \dots dt_{i,p}^{n_i(p)} \right] \mathcal{I}_{\mathcal{X}_{1_0}} A^{n_A} \prod_{i=1}^N T(\tilde{L}_i, \tilde{t}_i) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Hierbei geht $T(\tilde{L}_i, \tilde{t}_i)$ aus

$$\left(\bigotimes_{\ell \in L_i} K_\ell \right) \otimes \left(\bigotimes_{\ell \in L(P_i)} T_\ell \right) \otimes \left(\bigotimes_{\ell \in L^c(P_i) \setminus L} Q_\ell \right)$$

durch "Einschieben" des Potentialterms W_p zu den Zeiten $t_{i,p}^1, \dots, t_{i,p}^{n_i(p)}$ hervor. Es wurde ausgenutzt, daß sowohl A als auch $T(L_i, P_i)$ mit P_0 vertauscht. Ich benutze nun die Hölder-Ungleichung um die Spur in (3.49) abzuschätzen (vgl. den Beweis der Anmerkung ii) aus 3.2)

$$\begin{aligned}
 & \left| \text{Tr}_{\mathcal{H}_0} A^{n_A} \prod_{i=1}^N T(L_i, t_i) \right| \leq \\
 & \leq \|A\|^{n_A} \|P_0\| \prod_{i=1}^N \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}_0} |T(L_i, t_i)| \\
 & \leq \|A\|^{n_A} \|P_0\| \prod_{i=1}^N \left\{ \left[\prod_{p \in P_i} \|W_p\|^{n_i(p)} \right] \cdot \right. \\
 & \quad \cdot \left[\prod_{\ell \in L_i} \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}(\ell)} |K_\ell| \right] \cdot \left[\prod_{\ell \in L(P_i)} \text{Tr}_{\tilde{\mathcal{H}}(\ell)} |T_\ell^{(0)}| \right] \Big\} \\
 & = \|A\|^{n_A} \prod_{i=1}^N \left\{ \left[\prod_{p \in P_i} \omega^{n_i(p)} \right] \omega_1^{|L_i|} (1 + \omega_1)^{|L(P_i)|} \right\} \\
 & \hspace{25em} (3.50)
 \end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{H}}(\ell)$ ist hier der Hilbertraum $L^2(dg_\ell)$. Zusammen mit der Ungleichung $|L(P_i)| \leq 4|P_i|$ ergibt (3.41) sofort die gewünschte Schranke an $z_A(\gamma)$, da offenbar $|\gamma| = \sum |P_i| + \sum |L_i|$ ist.

Um die Analytizität von $z_A(\gamma)$ zu beweisen, genügt es, die Analytizität von

$$F(L_i, t_i) := \text{Tr}_{\mathcal{H}_0} A^{n_A} \prod_{i=1}^N T(L_i, t_i)$$

zu zeigen. Da nämlich $F(\underline{t}_1, \underline{t}_1)$ eine stetige Funktion der Zeiten $\{\underline{t}_1\}$ ist (zum Beweis verwende man die Hölder-Ungleichung), konvergieren die Riemann'schen Summenapproximationen des Integrals

$$I(\underline{L}_1, \underline{n}_1) = \int_0^1 F(\underline{L}_1, \underline{t}_1) \prod_{i=1}^N \prod_{r \in L_i} dt_{i,r}^{1, r} dt_{i,r}^{n_i(r)}$$

Da $F(\underline{L}_1, \underline{t}_1)$ in jedem kompakten Teilgebiet K von $\tilde{\mathcal{G}}_0$ durch eine von $\{\underline{t}_1\}$ unabhängige Konstante beschränkt ist ((3.50)), ist diese Konvergenz gleichmäßig in jedem kompakten Teilgebiet von $\tilde{\mathcal{G}}_0$ (man benutze den Satz von Montel). Also folgt aus der Analytizität von $F(\underline{L}_1, \underline{t}_1)$ die Analytizität von $I(\underline{L}_1, \underline{n}_1)$. Diese wiederum impliziert die Analytizität von $z_A(\gamma)$ (die benötigte gleichmäßige Konvergenz zeigt man wieder mittels des Satzes von Montel).

Es bleibt also nur noch die Analytizität von $F(\underline{L}_1, \underline{t}_1)$ zu zeigen. Es sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Orthonormalbasis (ONB) von $\tilde{\mathcal{X}}_{\lambda_0}$. Dann reduziert sich der Beweis der Analytizität von $F(\underline{L}_1, \underline{t}_1)$ auf den Beweis der Analytizität der Matrixelemente $(\Psi, \Psi' \in \mathcal{B})$

$$\langle \Psi, \rho_0 w_p \Psi' \rangle, \quad \langle \Psi, e^{-tD(\lambda_0^{1+})} \Psi' \rangle$$

Die Analytizität dieser Matrixelemente ist aber offensichtlich, sofern $\mathcal{B} = \bigoplus_{i \in \lambda_0^+} \mathcal{B}_i$ mit

$$\mathcal{B}_i = \{ \Psi \in L^2(dg_i) : \Psi = d_Q^{1/2} U_Q^{ob}(\cdot) \}$$

ist ($\mathcal{B}_i$ ist nach dem Peter-Weyl-Theorem eine ONB von $L^2(dg_i)$). ■

Korollar 3.4:

Es gibt Konstanten $\lambda_0, \mu_0 > 0$, die nur von der betrachteten Gruppe G , dem Charakter χ und der Dimension d abhängen, so daß die Clusterentwicklung (3.45) in jedem kompakten Teilgebiet von

$$\mathcal{G}_0 := \{(\lambda, \mu) : \operatorname{Re} \lambda > \lambda_0, |\mu| < \mu_0\}$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Die Konvergenz ist außerdem gleichmäßig in N und Λ_0 .

Beweis:

Man gehe wie im Beweis von Lemma 1.1 vor. ■

Lemma 3.5:

Es sei $g_0^2 = (8 \lambda_0 / \mu_0)^{1/2}$, $\beta_0 = (\lambda_0 \mu_0 / 2)^{1/2}$. Dann gibt es für $\beta > 0$ und $\operatorname{Re} g^2 > \bar{g}^2(\beta)$,

$$\bar{g}^2(\beta) := g_0^2 \max \{1, \beta_0 / \beta\}$$

stets eine natürliche Zahl N , so daß $(\lambda_N, \mu_N) \in \mathcal{G}_0$ sind

$$\lambda_N = \frac{\beta g^2}{2 N} \quad \mu_N = \frac{2 \beta}{N g^2}$$

Beweis:

Man wähle $N(\beta) = \min \{N : 2N > \beta / \beta_0\}$ ■

Satz 3.6:

i) Es sei $\beta > 0$ und $\operatorname{Re} g^2 > \bar{g}^2(\beta)$. Dann existiert der thermodynamische Limes

$$\lim_{\Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle A \rangle_{\beta, \Lambda_0} =: \langle A \rangle_{\beta}$$

$\forall A \in \mathcal{A}$. $\langle \cdot \rangle_{\beta}$ ist translationsinvariant und für $A \in \mathcal{A}$ ist $\langle A \rangle_{\beta}$ analytisch im Gebiet

$$\mathcal{G}(\beta) := \left\{ \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q^2} \neq 0 \quad \operatorname{Re} q^2 > \bar{q}^2(\beta) \right\}$$

(siehe Abb. 3.1)).

ii) Es seien $A, B \in \mathcal{A}$; $d(A, B)$ sei der Abstand von $\operatorname{supp}(A)$ und $\operatorname{supp}(B)$; schließlich seien $\beta > 0$ und $\operatorname{Re} q^2 > \bar{q}^2(\beta)$. Dann gibt es Konstanten $M > 0$ und $K_{AB} < \infty$, so daß

$$\begin{aligned} | \langle AB \rangle_\beta - \langle A \rangle_\beta \langle B \rangle_\beta | &\leq \\ &\leq K_{AB} e^{-\pi d(A, B)} \end{aligned}$$

ist. M ist unabhängig von A und B und K_{AB} ist invariant unter Translationen von A oder B .

Beweis:

Man wähle N , λ_N und μ_N gemäß Lemma 3.5 und beachte, daß damit

$$\langle A \rangle_{\beta, \lambda_0} = \langle A \rangle_{N, \lambda_0}^{\lambda_N, \mu_N} \quad (3.51)$$

ist. Satz 3.6 folgt dann sofort aus Korollar 3.4: (Um die Analytizität von $\langle A \rangle_\beta$ zu beweisen, benutze man die Analytizität von

$$\langle A \rangle_N^{\lambda, \mu} = \lim_{\lambda_0 \rightarrow \infty} \langle A \rangle_{N, \lambda_0}^{\lambda, \mu} \quad (3.52)$$

im Gebiet $\mathcal{G}_0$ und die Tatsache, daß λ_N und μ_N als Funktion von $1/q^2$ analytisch im Gebiet $\mathcal{G}(\beta)$ sind) ■

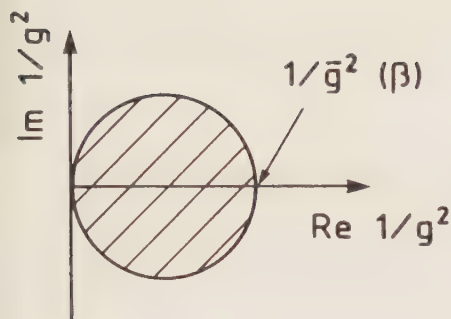


Abb. 3.1:

Das Gebiet $\mathcal{G}$ (B)

Satz 3.7:

i) Es sei $\text{Re } g^2 > g_0^2$. Dann existiert der "volle" thermodynamische Limes

$$\lim_{\substack{A_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d \\ \beta \rightarrow \infty}} \langle A \rangle_{\beta, A_0} =: \langle A \rangle$$

$\forall A \in \mathcal{A}$. $\langle \cdot \rangle$ ist translationsinvariant und $\forall A \in \mathcal{A}$ läßt sich $\langle A \rangle$ als Funktion von $1/g^4$ im Gebiet

$$\mathcal{G} := \left\{ \frac{1}{g^4} : \left| \frac{1}{g^4} \right| < \frac{1}{g_0^4} \right\}$$

analytisch fortsetzen.

ii) Es seien $\text{Re } g^2 > g_0^2$, $A, B \in \mathcal{A}$ und $d(A, B)$ sei der Abstand von $\text{supp } (A)$ und $\text{supp } (B)$. Dann existiert $\forall t > 0$ der Limes (3.11). Weiter gibt es Konstanten $M > 0$ und $K_{AB} < \infty$, so daß

$$|\omega_{it}(A, B) - \langle A \rangle \langle B \rangle| \leq K_{AB} e^{-M(t + d(A, B))}$$

ist. M ist unabhängig von A, B und t ; K_{AB} ist unabhängig von t und invariant unter Translationen von A oder B .

iii) Es sei $g^2 > g_0^2$. Dann ist $\forall A \in \mathcal{A} \lim_{t \rightarrow 0} \omega_{it}(A, A) = \langle A^* A \rangle$.

Anmerkungen:

i) Gemäß Lemma 3.1 impliziert Satz 3.7, iii) die Existenz des Hamiltonoperators H im thermodynamischen Limes, $H \geq 0$.

ii) Es sei Ω der Vektor $\psi_{\mathcal{H}}$ gemäß Abschnitt 3.1, $H\Omega = 0$, und $\mathcal{X}_{\perp}$ sei der zu Ω senkrechte Unterraum des Hilbertraumes $\mathcal{X}$. dann ist aufgrund von Satz 3.7, ii)

$$\inf \text{spec } H \upharpoonright \mathcal{X}_{\perp} \gg M$$

Die Theorie besitzt also für $g^2 > g_0^2$ ein "Massengap".

iii) Anders als bei Temperatur $\beta^{-1} = 0$ sind die Erwartungswerte $\langle A \rangle_{\beta}$ für $0 < \beta < \infty$ und $A \in \mathcal{A}$ i.a. nicht zu einer in einer Umgebung von $1/g^2 = 0$ analytischen Funktion fortsetzbar (für spezielle A , z.B. $A = 0$, ist dies natürlich immer möglich.

iv) Die Analytizitätseigenschaft aus Satz 3.7, i) ist eine Folge der Tatsache, daß die Theorie mit Hamilton-Operator $H'_{\Lambda_0} = \frac{1}{g} H_{\Lambda_0}$ dieselben Vakuumenerwartungswerte $\langle A \rangle$ besitzt wie die Theorie mit Hamilton-Operator H_{Λ_0} .

v) In Satz 3.6 habe ich nur die Analytizitätseigenschaften von $\langle A \rangle_{\beta}$ als Funktion von $1/g^2$ formuliert. Aus den Analytizitätseigenschaften in und μ folgert man jedoch sofort, daß $\langle A \rangle_{\beta}$ als Funktion von $(\beta, 1/g^2)$ analytisch im Gebiet

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \left\{ \left(\beta, \frac{1}{g^2} \right) : \frac{1}{g^2} \neq \sigma; \operatorname{Re} \frac{\beta g^2}{2N} > \lambda_0, \left| \frac{2\beta}{Ng^2} \right| < \mu_0 \right\}$$

ist. Insbesondere ist $\langle A \rangle_{\beta}$ für $\beta > 0$ und $\operatorname{Re} g^2 > \bar{g}^2(\beta)$ reell analytisch als Funktion von β .

Beweis der Anmerkung iii)

Es sei

$$f_A\left(\frac{1}{q^2}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} \left(\frac{1}{q^2}\right)^n$$

eine in einer Umgebung von Null analytische Funktion, die Fortsetzung von $\langle A \rangle_\beta$ ist. Dann ist

$$\alpha_n = \lim_{0 < q^2 \rightarrow 0} \frac{d^n}{d(1/q^2)^n} \langle A \rangle_\beta$$

Man wähle nun N gemäß Lemma 3.5 und verwende die Clusterentwicklung für $\langle A \rangle_\beta$ zur Berechnung von α_n . Man zeigt dann leicht, daß

$$\alpha_n = \frac{d^n}{d(1/q^2)^n} \Big|_{1/q^2=0} \langle A \rangle_N^{\lambda=\infty, \mu=\frac{2\beta}{Nq^2}}$$

ist. Hieraus folgt offenbar

$$f_A\left(\frac{1}{q^2}\right) = \langle A \rangle_N^{\lambda=\infty, \mu=\frac{2\beta}{Nq^2}} = \langle 1 | A | 1 \rangle$$

wobei $|1\rangle$ die konstante Funktion 1 aus $L^2(\text{dg}_{\text{supp}A})$ ist $\langle 1 | A | 1 \rangle$ ist aber im allgemeinen keine analytische Fortsetzung von $\langle A \rangle_\beta$. ■

Beweis von Satz 3.7 i) und ii)

Zu zeigen ist nur noch die analytische Fortsetzbarkeit von $\langle A \rangle$.

Ich nehme zunächst $g^2 > g_0^2$ an und setze $\lambda = 2\lambda_0$, $\tilde{\beta} = 2\lambda/g^2$ und

$$N(\beta) = [\beta / \tilde{\beta}]$$

$$\lambda(\beta) = \frac{q^2 \beta}{2 N(\beta)}$$

$$\mu(\beta) = \frac{2\beta}{q^2 N(\beta)}$$

Dann ist

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \lambda(\beta) = \frac{g^2 \tilde{\beta}}{2} = \lambda > \lambda_0$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu(\beta) = \frac{2\tilde{\beta}}{g^2} = \frac{\lambda}{4g^4} < \mu_0$$

Also ist für $g^2 > g_0^2$

$$\langle A \rangle := \lim_{\substack{\beta \rightarrow \infty \\ \lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d}} \langle A \rangle_{\beta, \lambda_0}$$

$$= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d}} \langle A \rangle_{N, \lambda_0}^{\lambda, \lambda/4g^4} =: f_A\left(\frac{1}{g^4}\right)$$

Da

$$g_A(\lambda, \mu) := \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d}} \langle A \rangle_{N, \lambda_0}^{\lambda, \mu}$$

Im Gebiet $\mathcal{G}_0$ analytisch ist, ist f_A im Gebiet $\mathcal{G}$ analytisch. f_A ist die gesuchte analytische Fortsetzung von $\langle A \rangle$. ■

Beweis von Satz 3.7 iii)

Ich setze zunächst $\lambda = 2\lambda_0$, $\mu = 4\lambda/g^4$ und

$$T = e^{D+W}$$

$$D = \sum_{\langle xy \rangle \in \Lambda_0^{1,+}} \lambda \Delta_{xy}$$

$$W = \sum_{n \in \Lambda_0^{2,+}} \mu R_X(y_n)$$

Weiter sei für $0 \leq s \leq 1$

$$T(A; \lambda) := A^* e^{\lambda(D+W)} A e^{(1-\lambda)(D+W)}$$

$$Z_{N, \lambda_0}(A; \lambda) := \text{Tr}_{\mathcal{H}_{\lambda_0}} T(A; \lambda) T^{N-1}$$

Dann ist offenbar für $0 \leq \frac{\text{tg}^2}{2} = s \lambda \leq \lambda$

$$\omega_{it}(A, A) = \lim_{N \rightarrow \infty, \lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d} Z_{N, \lambda_0}(A; \lambda) / Z_{N, \lambda_0}$$

wobei ich Z_{N, λ_0} anstelle von $Z_{N, \lambda_0}^{\lambda, \mu}$ geschrieben habe. Das weitere Vorgehen ist zunächst wie gehabt: Man entwickle I und $I(A; s)$ mit Hilfe der Duhamel-Formel um $T^{(0)}$ resp.

$$T^{(0)}(A; \lambda) = A^* e^{\lambda D} A e^{(1-\lambda)D}$$

Statt (3.41) erhält man die Formel

$$T(A; \lambda) = \sum_{\substack{P \subset \Lambda_0^{2+} \\ L \subset L^c(P)}} T(A; \lambda | L, P)$$

wobei $T(A; s | L, P)$ aus $T(L, P)$ durch Einschleiben von A^* zur Zeit 0 und A zur Zeit s hervorgeht. Da die Faktorisierungseigenschaften dieselben wie zuvor sind, ändert sich auch nicht die Struktur der Clusterentwicklung

$$\frac{Z_{N, \lambda_0}(A; \lambda)}{Z_{N, \lambda_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\Phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z_{A^* A, \lambda}(\gamma_i) \quad (3.53)$$

Die Summe $\sum'$ geht über Terme mit $n-1$ gewöhnlichen Polymeren (definiert wie zuvor) und einem $A^* A$ Polymer (definiert wie zuvor die A -Polymere). Während die Aktivität für gewöhnliche Polymere die alte bleibt, ergibt sich $z_{A^* A, s}(\gamma)$ für $A^* A$ -Polymere aus $z_A^*(\gamma)$ durch zusätzliches Einschleiben von A zur Zeit s . Anstelle von Lemma 3.3 erhält man die Abschätzung

$$|z_{A^* A, \lambda}(\gamma)| \leq \|A\|^{2n_{A^* A}} e^{-b|\gamma|} \quad (3.54)$$

Die rechte Seite hängt weder von s , noch von Λ_0 oder N ab. Aufgrund dessen konvergiert die rechte Seite von (3.53) gleichmäßig in Λ_0 , N und s . Wir können deshalb sowohl den thermodynamischen Limes, als auch den Limes $s \rightarrow 0$ Term für Term diskutieren. Da der thermodynamische Limes für fest vorgegebenes γ schon bei endlichen Λ_0 und N erreicht wird, ist die Stetigkeit von $z_{A^*A,s}(\gamma)$ im thermodynamischen Limes evident. Damit ist gezeigt, daß $\omega_{it}(A,A)$ für $t \rightarrow 0$ gegen $\langle A^*A \rangle$ geht. ■

Satz 3.8:

i) Es sei $\beta = 0$ und $\text{Re } g^2 > \bar{g}^2(\beta)$. Dann existiert der thermodynamische Limes

$$G_{q\bar{q}}^\beta(x, y) = \lim_{\Lambda_0 \rightarrow \mathbb{Z}^d} e^{-\beta F_{q\bar{q}}^{\beta, \Lambda_0}(x, y)}$$

er ist translationsinvariant und als Funktion von $1/g^2$ analytisch im Gebiet $\mathcal{G}(\beta)$.

ii) Für Darstellungen q , die das Zentrum von G nicht trivial darstellen, und für $\beta > 0$, $\text{Re } g^2 > \bar{g}^2(\beta)$ gilt

$$|G_{q\bar{q}}^\beta(x, y)| \leq K e^{-\alpha |x-y|}$$

mit (von x und y unabhängigen) Konstanten $K < \infty$, $\alpha > 0$.

iii) Es sei q wie in ii) gewählt und $\text{Re } g^2 > g_0^2$. Dann gibt es Konstanten $\tilde{\beta} < \infty$ und $\tilde{\alpha} > 0$, so daß $\forall \beta > \tilde{\beta}$ $\alpha \geq \tilde{\alpha}$ ist.

Anmerkungen:

vi) Die Aussage ii) impliziert klarerweise Confinement im Sinne von Polyakov, sofern $\text{Re } g^2 > \bar{g}^2(\beta)$ ist.

vii) Die Bedeutung von iii) liegt in der Tatsache, daß die Saitenspannung $\sigma_{q,\beta}^{(P)}$ auch im Limes $\beta \rightarrow \infty$ (Temperatur Null) nicht verschwindet.

Beweis von Satz 3.8 i)

Um eine Clusterentwicklung für

$$G_{q\bar{q}}^{\beta, \Lambda_0}(x, y) := Z_{q(x) \bar{q}(y)}^{\beta, \Lambda_0} / Z_{\beta, \Lambda_0}$$

herzuleiten, betrachte ich wieder modifizierte Zustandssummen

$$\begin{aligned} Z(\alpha) &:= Z_{\beta, \Lambda_0} + \alpha Z_{q(x) \bar{q}(y)}^{\beta, \Lambda_0} \\ &= \text{Tr}_{\tilde{\alpha}_{\Lambda_0}} \left\{ (P_0 T)^N + \alpha (P_{q(x) \bar{q}(y)} T)^N \right\} \\ &= \int \prod_{t=1}^N dq_t dh_t \prod_{t=1}^N T(q_t^{h_t}, q_{t+1}) \times \\ &\quad \times \left\{ 1 + \alpha \prod_{t=1}^N d_q^2 \overline{\chi_q(h_{tx})} \chi_q(h_{ty}) \right\} \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (3.35) ist

$$\begin{aligned} Z(\alpha) &= \sum_{n=0,1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}}^c \quad (3.55) \\ &\quad \int P(x, y)^n \left(\prod_{i=1}^m g(\gamma_i) \right) \prod_{t=1}^N dq_t dh_t \end{aligned}$$

wobei die Summe $\sum^c$ über Mengen von paarweise kompatiblen Polymeren gemäß Definition 3.1 geht und $P(x, y)$ für

$$\prod_{t=1}^N d_q^2 \overline{\chi_q(h_{tx})} \chi_q(h_{ty}) \quad (3.56)$$

steht.

Ich gehe nun ähnlich wie bei der Definition der A-Polymere in Abschnitt 3.2 vor: Für $z \in \Lambda_0$ sei L_z die Menge der Links $((z,t), (z,t+1))$ $t = 1, \dots, N$. Ein 3-Tupel $\gamma = (n, W, P)$ bestehend aus einer Zahl $n \in \{0, 1\}$ und Mengen $W \subset \Lambda_{\cup}^{3+}$, $P \subset \Lambda_{\cup}^{2+}$ heißt Polymer, wenn

a) $n = 0$ ist und (W, P) ein Polymer gemäß Definition 3.1 ist oder

b) $n = 1$ ist, und (W, P) die Vereinigung von paarweise kompatiblen Polymeren ist, die alle mit $L_x \cup L_y$ zusammenhängen.

Im Fall a) heißt γ gewöhnliches Polymer, im Fall b) Polyakov-Polymer.

Die Aktivität von $\gamma = (n, W, P)$ ist durch

$$z_{P(x,y)}(\gamma) = \int P(x,y)^n \mathcal{G}((W, P)) \prod_{t=1}^N dg_t dh_t \quad (3.57)$$

definiert, und der Kompatibilitätsbegriff ist wie in Abschnitt 1.2 gewählt (das erweiterte Polymer ist nun $W \cup P$ resp. $W \cup P \cup L_x \cup L_y$, je nachdem, ob $n = 0$ oder $n = 1$ ist).

Mit diesen Definitionen ist

$$Z(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}}^c \prod_{i=1}^m z_{P(x,y)}(\gamma_i)$$

und somit (vgl. Abschnitt 1.2)

$$G_{q\bar{q}}^{\beta, \Lambda_0}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}^1 \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_m)}{m!} \prod_{i=1}^m z_{P(x,y)}(\gamma_i)$$

(3.58)

wobei die Summe $\sum^1$ über Folgen $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ von Polymeren geht, die genau ein Polyakov-Polymer enthalten.

Umschreiben von $z_{P(x,y)}(\gamma)$ als Spur über $\hat{\alpha}_{\Lambda_0}$ ergibt die Abschätzung

$$|z_{P(x,y)}| \leq e^{-b|\gamma|} \quad (3.59)$$

wobei ich ausgenutzt habe, daß die Operatornorm $\|P_{q(x)\bar{q}(y)}\|$ von $P_{q(x)\bar{q}(y)}$ gleich eins ist. Korollar 3.4 gilt somit auch für die Clusterentwicklung (3.58). Hieraus folgt Satz 3.8, i). ■

Um Satz 3.8 ii) und iii) zu beweisen, zeige ich zunächst das folgende Lemma 3.9. Für ein Polyakov-Polymer γ bezeichnet dabei γ_x die Vereinigung derjenigen Zusammenhangskomponenten von γ , die mit L_x zusammenhängen, γ_y ist analog definiert.

Lemma 3.9:

Es sei $\gamma = (n, W, P)$ ein Polyakov-Polymer mit nicht-verschwindender Aktivität. q sei verschieden von der trivialen Darstellung. Dann gilt

- i) jedes Link in $L_x \cup L_y$ hängt mit $W \cup P$ zusammen,
- ii) Es sei $\gamma_x = (W_x, P_x)$, $\gamma_y = (W_y, P_y)$. Dann ist sowohl $W_x \cup P_x$ als auch $W_y \cup P_y$ eine zusammenhängende Menge.
- iii) Sofern q das Zentrum nicht-trivial darstellt, enthält jede Zeitschicht von γ eine zusammenhängende Teilmenge, die L_x und L_y verbindet.

Beweis:

i) und ii) beweist man ebenso wie die entsprechenden Aussagen aus Lemma 1.4.

iii) Es seien $(W_1, P_1), \dots, (W_N, P_N)$ die Zeitschichten von γ . Dann ist

$$z_{P(x, \gamma)}(\gamma) = \int_{\tilde{\sigma}_{\Lambda_0}} \prod_{t=1}^N P_{q(x)\bar{q}(y)} T(\ell(P_t), p(W_t))$$

Deshalb genügt es zu zeigen, daß für beliebige Mengen $L \subset \Lambda_0^{1+}$, $P \subset \Lambda_0^{2+}$

$$P_{q(x)\bar{q}(y)} T(L, P) = 0$$

ist, sofern $L \cup L(P)$ keinen Weg enthält, der x und y verbindet.

Ich nehme nun an, daß $L \cup L(P)$ keinen solchen Weg enthält. $\mathcal{B}$ sei die Menge der Vektoren $\psi_Q^{a,l}$ aus $\tilde{\mathcal{X}}_{1,0}$ mit

$$\psi_Q^{a,l}(q) = \prod_{\ell \in A_1^{++}} U_{Q(\ell)}^{a(\ell), \ell(\ell)}$$

($Q(\ell) \in \hat{G}$). Da aufgrund des Peter-Weyl-Theorems eine Basis von $\tilde{\mathcal{X}}_{1,0}$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\forall \psi_Q^{a,l} \in \mathcal{B}$

$$P_{q(x)} \bar{q}(y) T(L, P) \psi_Q^{a,l} = 0$$

ist. O.E.d.A. sei $\text{supp } Q \subset L(P) \cup L$ (sonst ist $T(L, P) \psi_Q^{a,l} = 0$). Da $T(L, P)$ mit den Eichtransformationen $U(h)$ vertauscht, genügt es zu zeigen, daß

$$P_{q(x)} \bar{q}(y) \psi_Q^{a,l} = 0 \quad (3.60)$$

ist. Ich nehme an, daß (3.60) nicht erfüllt ist. Dann ist offenbar

$$(d^* Q')(z) = \begin{cases} Q' & z = x \\ \bar{Q}' & z = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.61)$$

wobei für $Q \in \hat{G}$ Q' die durch Q induzierte Zentrumsdarstellung bezeichnet. (3.69) steht aber im Widerspruch dazu, daß $\text{supp } Q' \subset \text{supp } Q \subset L(P) \cup L$ keinen Weg enthält, der x und y verbindet. ■

Beweis von Satz 3.8, ii) und iii)

Unter Verwendung von Lemma 3.9 ergibt die Clusterentwicklung (3.58) die Schranke

$$|\epsilon_{q\bar{q}}^\beta(x, y)| \leq K e^{-\alpha' N |x - y|}$$

sofern N nur so gewählt ist, daß $\operatorname{Re} \lambda_N > \lambda_0$ und $|\mu_N| < \mu_0$ ist (λ_N und μ_N sind wie in Lemma 3.5 gewählt). $K < \infty$ und $\alpha' > 0$ hängen nur über $\mu = \mu_N$ und $\lambda = \lambda_N$ von N , β und g^2 ab und sind in jedem kompakten Teilgebiet von

$$\mathcal{G}_0 = \{(\lambda, \mu) : \operatorname{Re} \lambda > \lambda_0, |\mu| < \mu_0\}$$

nach oben bzw. unten beschränkt. Hieraus folgert man sofort die Schranke gemäß iii) an $\alpha = N\alpha'$ (man wähle $N(\beta)$ wie im Beweis von Satz 3.7, i)). ■

Mit dem Beweis des folgenden Satzes will ich diesen Abschnitt abschließen. Für geschlossene Schleifen C in Λ_0 bezeichnet $w_q(C)$ den Multiplikationsoperator

$$w_q(C) = \mathcal{X}_q(g_C)$$

$A(C)$ sei wie in Abschnitt 1.3 definiert.

Satz 3.10:

Es sei $\beta > 0$ und $\operatorname{Re} g^2 > \bar{g}^2(\beta)$. Dann gibt es Konstanten $K < \infty$, $\alpha' > 0$, so daß gilt: $\forall$ doppeltpunktfreien Schleifen C in Λ_0 und $\forall$ Darstellungen q , die eine nicht-triviale Zentrumsdarstellung induzieren, ist

$$|\langle w_q(C) \rangle_\beta| \leq K e^{-\alpha' A(C)}$$

(Flächengesetz für "horizontale" Wilson-Loops). Im Limes β bleibt $\alpha' > 0$, solange $\operatorname{Re} g^2 > g_0^2$ ist.

Beweis:

Es sei $P \subset \Lambda_0^{2+}$, $\omega: \Lambda_0^{1+} \rightarrow G$ nehme nur Werte im Zentrum $Z(G)$ an und sei so gewählt, daß $(d\omega)(p) \neq 1$ ist, wenn immer $p \in P$ ist. $K(P)$ sei gemäß (3.29) definiert. Dann ist

$$K(P)(\omega g, \omega g') = K(P)(g, g') \quad (3.62)$$

(Man benutze die Tatsache, daß

$$e^{\cap D(L(P))}(\omega g, \omega g') = e^{\cap D(L(P))}(g, g')$$

ist, und daß für $p \in P$ $V_p(\omega g) = V(g)$ ist).

Ich betrachte nun ein $W_q(C)$ -Polymer $\gamma = (n, W, P)$. Dann ist aufgrund der Invarianzeigenschaft (3.62)

$$z_{W_q(C)}(\gamma) = 0$$

wenn immer es möglich ist, eine co-geschlossene Menge I von Plaketten zu finden, deren Windungszahl bzgl. C gleich 1 ist, und die keine Plakette mit $p(W)$ gemeinsam hat. (Der Beweis dieser Tatsache sei dem Leser überlassen; vgl. auch [Mack, 1983]). Hieraus folgt aber, daß die Aktivität von γ nur dann von Null verschieden ist, wenn $|p(W)|$ und damit $|\gamma| \geq A(C)$ ist. Hieraus folgt die Behauptung, α' kann wie im Beweis von Satz 3.8 ii) resp. iii) gewählt werden. ■

3.4 Endliche Gruppen: Deconfinement vs. "Freezing"

Im letzten Abschnitt habe ich gezeigt, daß sich die Gittereichtheorien im τ -Kontinuum für $\text{Re } g^2 > \bar{g}^2(\beta)$ in einer Phase mit Confinement im Sinne von Polyakov und "Flächengesetz" für horizontale Wilson-Loops befinden. Andererseits wurde in [Borgs, Seiler, 1983] bewiesen, daß diese Theorien für $0 < g^2 < g_2^2(\beta) = \text{const} \times \beta^{-1}$ kein Confinement mehr aufweisen. Dies heißt jedoch nicht unbedingt, daß das Flächengesetz für horizontale Wilson-Loops ungültig wird. Tatsächlich kann man zeigen, daß das Flächengesetz zumindestens immer dann gilt, wenn $g^2 \beta^{-1} \gg 1$ ist [Borgs, 1985]. Bei hinreichend hohen Temperaturen gibt es also einen Bereich $q_1^2(\beta) < q^2 < q_2^2(\beta)$, in der die Theorie gleichzeitig Deconfinement im Sinne von Polyakov und Flächengesetz für horizontale Wilson-Loops aufweist.

Für endliche Gruppen sollte es noch eine weitere Phase geben, mit Deconfinement im Sinne von Polyakov und "Umfangsgesetz" für horizontale Wilson-Loops. Der allgemeinen Terminologie folgend nenne ich eine solche Phase "Freezing"-Phase. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Existenz der "Freezing"-Phase für endliche Gruppen zu zeigen. Ich werde hierzu eine Entwicklung herleiten, die viele Ähnlichkeiten mit der "Quanten-Peierls"-Entwicklung aus [Ginibre, 1969] hat. Aus technischen Gründen werde ich mich auf abelsche Gruppen beschränken müssen.

Es erweist sich als zweckmäßig, den Hamiltonoperator $H_{\Lambda_0} = H_{\Lambda_0}^{(0)} + V_{\Lambda_0}$ statt durch (3.6) und (3.7) durch

$$H_{\Lambda_0}^{(0)} = \frac{g^2}{2} \sum_{\langle xy \rangle} \tilde{\Delta}_{xy} \quad (3.63)$$

$$V_{\Lambda_0} = \frac{1}{g^2} \sum_{\mu \in \Lambda_0^{2+}} d^2(q_\mu, 1)$$

mit

$$(\tilde{\Delta}_{xy} \psi_{xy})(q_{xy}) = - \sum_{h_{xy}:} \frac{\psi_{xy}(h_{xy})}{d_o^2} \quad (3.64)$$

$$d(h_{xy}, q_{xy}) = d_o$$

zu definieren. Man beachte, daß sich diese Definition von H_{λ_0} von der in Abschnitt 3.1 nur durch eine irrelevante, additive Konstante unterscheidet.

Ich schreibe nun wieder

$$Z_{\beta, \lambda_0} = \int_{\mathcal{X}_{\lambda_0}} T^N$$

wobei T wie in Abschnitt 2.2 definiert ist. D_{xy} und $W(p)$ sind allerdings (3.63) und (3.64) entsprechend durch

$$D_{xy} = -\frac{\beta q^2}{2N} \tilde{\Delta}_{xy} \quad W(p) = -\frac{\beta}{Nq^2} d^2(q, \mathbb{Z}) \quad (3.65)$$

zu ersetzen. Statt T mittels der Duhamel-Formel um e^D zu entwickeln, entwickle ich T nun um

$$T^{(0)} = e^W \quad (3.66)$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} T &= e^{W + \sum_{\ell \in \Lambda_0^{1+}} D_\ell} \\ &= \left[\prod_{\ell \in \Lambda_0^{1+}} \left(\sum_{n_\ell=0}^{\infty} \frac{1}{n_\ell!} \int_0^1 dt_\ell^{n_\ell} \cdot d t_\ell^{n_\ell} \right) \right] T(\underline{t}) \end{aligned}$$

wobei $T(\underline{t})$ aus $T^{(0)}$ durch Einschleiben von D_ℓ zu den Zeiten $t_\ell^1, \dots, t_\ell^{n_\ell}$ hervorgeht. Durch Resummation erhält man

$$T = \sum_{L \subset \Lambda_0^{1+}} T(L) \quad (3.67)$$

mit

$$T(L) = \left[\prod_{\ell \in \Lambda_0^{1+}} \left(\sum_{n_\ell=0}^{\infty} \frac{1}{n_\ell!} \int_0^1 dt_\ell^{n_\ell} \cdot d t_\ell^{n_\ell} \right) \right] T(\underline{t}) \quad (3.68)$$

Als nächstes führe ich eine Basis von $\mathcal{X}_{\Lambda_0}$ ein, in der $\Gamma^{(0)}$ diagonal ist. Es sei für $g: \Lambda_0^{1+} \rightarrow G: \ell \mapsto g_\ell$

$$\psi_g(g') := \prod_{\ell \in \Lambda_0^{1+}} \delta(g_\ell, g'_\ell) \quad (3.69)$$

$$(dg)(p) := \prod_{\ell \in \partial p} g_\ell$$

Dann ist $P_0 \psi_g = P_0 \psi_{g'}$, wenn immer $dg = dg'$ ist. Andererseits kann jede Funktion $f: \Lambda_0^{2+} \rightarrow G$ mit $df = 0$ als dg mit geeignetem $g: \Lambda_0^{1+} \rightarrow G$ geschrieben werden (man beachte, daß Λ_0^1, Λ_0^2 etc. so definiert wurden, daß $(\Lambda_0, \Lambda_0^1, \Lambda_0^2, \dots, \Lambda_0^d)$ ein abgeschlossener Unter-Zell-Komplex von $\mathbb{Z}^d$ ist; für den offenen Zell-Komplex wäre die obig Aussage im Fall $d=2$ falsch). Für $f: \Lambda_0^{2+} \rightarrow G$ mit $df = 0$ können wir deshalb $\tilde{\psi}^f$ durch

$$\tilde{\psi}^f = P_0 \psi_g \quad (3.70)$$

definieren, wobei g so gewählt sei, daß $dg = f$ ist. Ich definiere

$$\mathcal{C} := \{ f: \Lambda_0^{2+} \rightarrow G \mid df = 0 \}$$

und nenne die Elemente von $\mathcal{C}$ Konturen. Man zeigt nun leicht, daß für $f, f' \in \mathcal{C}$

$$(\tilde{\psi}^f, \tilde{\psi}^{f'}) = \delta(f, f') \parallel \tilde{\psi}^f \parallel^2$$

ist, wobei $\parallel \tilde{\psi}^f \parallel > 0$ nicht von f abhängt.

$$B := \{ \psi^f \mid \psi^f = \parallel \tilde{\psi}^f \parallel^{-1} \tilde{\psi}^f, f \in \mathcal{C} \} \quad (3.71)$$

ist also ein Orthonormalsystem. Da die Vektoren der Form ψ_g eine Basis von $\tilde{\mathcal{X}}_{\Lambda_0}$ bilden, ist B eine Basis von $\mathcal{X}_{\Lambda_0}$. Ich nenne B auch die Kontur-Basis von $\mathcal{X}_{\Lambda_0}$.

W und damit auch $\Gamma^{(0)}$ ist offensichtlich diagonal in der Basis $\tilde{B}$:

$$W \psi^f = \left(\sum_{p \in \Lambda_0^{1+}} w(f(p)) \right) \psi^f \quad (3.72)$$

mit

$$w(h) := - \frac{\beta}{N g^2} d^2(h, \mathbb{1}) \quad (3.73)$$

Γ und $\Gamma(t)$ sind jedoch nicht diagonal in der Basis $\tilde{B}$, da der kinetische Term Übergänge induziert:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{xy} p_o \psi_g &= p_o \tilde{\Delta}_{xy} \psi_g = \\ &= - \sum_{h_{xy}: d(h_{xy}, \mathbb{1}) = d_o} d_o^{-2} p_o \psi_{g \pm h} \end{aligned}$$

wobei $\underline{h}(\ell) = h_{xy}$ ist, wenn $\ell = \langle xy \rangle$ ist, und gleich 1, wenn $\ell \neq \langle xy \rangle$ ist. Für $\psi^f \in \tilde{B}$ erhält man

$$\tilde{\Delta}_{xy} \psi^f = - \sum_{h_{xy} \in \mathcal{U}} d_o^{-2} \psi^f dh \quad (3.74)$$

wobei $\mathcal{U} \subset G$ aus denjenigen $h \in G$ besteht, für die $d(h, \mathbb{1}) = d_o$ ist.

Mit Hilfe von (3.71) und (3.67) schreibt sich Z_{β, Λ_o} als

$$Z_{\beta, \Lambda_o} = \sum_{\substack{f_1, \dots, f_N \in \mathcal{C} \\ L_1, \dots, L_N \subset \Lambda_o^{1+}}} \prod_{t=1}^N (\psi^{f_t}, T(1_t) \psi^{f_{t+1}}) \quad (3.75)$$

wobei f_{N+1} als f_1 zu lesen ist. Ich nenne eine Konfiguration $K = (f_1, \dots, f_N, L_1, \dots, L_N)$ erlaubt, wenn $\forall p \in \Lambda_o^{1+}$ und alle $t \in \{1, \dots, N\}$ gilt: $f_t(p) = f_{t+1}(p)$ oder $\exists \ell \in L_t$ mit ℓ oder $-\ell \in \partial p$. Aufgrund von (3.71) und der Tatsache, daß $\forall s \geq 0 e^{sW}$ in der Basis $\tilde{B}$ diagonal ist,

tragen nur erlaubte Konfigurationen zu Z_{β, Λ_0} bei. Für eine Konfiguration $K = (f_1, \dots, f_N, L_1, \dots, L_N)$ definiere ich

$$Z(K) := \prod_{t=1}^N (\psi^t, T(L_t) \psi^{t+1}) \quad (3.76)$$

Um Z_{β, Λ_0} als Zustandssumme eines Polymersystems zu schreiben benötige ich die folgende Notation.

Es sei $\mathcal{Q}_0$ das zu Λ_0 duale Gitter, $\mathcal{Q} := \{1, \dots, N\} \times \mathcal{Q}_0$. Für eine k -Zelle $c \in \mathcal{Q}_0^{k+}$ bezeichne $\tilde{c}(t, c)$ die $(k+1)$ -Zelle in $\mathcal{Q}^{(k+1)+}$ mit "Boden" (t, c) und "Deckel" $(t+1, c)$. Im Falle $k = d-1$ ($k = d-2$) nenne ich $\tilde{c}(t, c)$ einen vertikalen Hyperwürfel (eine vertikale Hyperplakette). Eine $(d-2)$ -Zelle $\tilde{c} = (t, c)$ mit $c \in \mathcal{Q}_0^{(d-2)+}$ nenne ich ein horizontales Hyperlink.

Der co-Träger $*\text{-supp } K$ einer Konfiguration K ist als die Menge aller vertikalen Hyperwürfel $\tilde{c}(t, c)$ und horizontalen Hyperlinks $\tilde{c} = (t, c)$ mit $*c \in L_t$ resp. $*c \in \text{supp } f$ definiert. Der erweiterte co-Träger $*\text{-supp } K$ von K geht aus $*\text{-supp } K$ durch Hinzunahme aller vertikalen Hyperplaketten $\tilde{c}(t, c)$ hervor, für die (t, c) und $(t+1, c)$ in $*\text{-supp } K$ liegen, ohne daß $\tilde{c}(t, c)$ oder $-\tilde{c}(t, c)$ im Rand $\partial \tilde{c}$ eines Hyperwürfels $\hat{c} \in *\text{-supp } K$ liegt.

Eine Konfiguration K heißt einfach (oder auch: ein Polymer), wenn K erlaubt ist und der erweiterte co-Träger von K eine zusammenhängende Menge ist. Zwei Konfigurationen K, K' heißen kompatibel (schreibe $K \sim K'$), wenn ihre erweiterten Träger nicht miteinander zusammenhängen. Für zwei Konfigurationen $K = (f_1, \dots, f_N, L_1, \dots, L_N)$ und $K' = (f'_1, \dots, f'_N, L'_1, \dots, L'_N)$ ist $K+K'$ die Konfiguration $(f_1+f'_1, \dots, f_N+f'_N, \dots, L_1 \vee L'_1, \dots, L_N \vee L'_N)$.

Jede erlaubte Konfiguration K läßt sich dann in eindeutiger Weise so in einfache Konfigurationen $K_1, \dots, K_n$ zerlegen, daß $K = K_1 + \dots + K_n$ ist und $K_1, \dots, K_n$ paarweise kompatibel sind. Ich nenne $K_1, \dots, K_n$ die Komponenten von K . Man beachte, daß die obigen Definitionen so gewählt wurden, daß für eine erlaubte Konfiguration K mit Komponenten $K_1, \dots, K_n$

$$Z(K) = \prod_{i=1}^n Z(K_i) \quad (3.77)$$

ist.

Mit Hilfe von (3.75) bis (3.77) schreibt sich Z_{β, Λ_0} als Zustandssumme des gerade definierten Polymersystems

$$Z_{\beta, \Lambda_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{K_1, \dots, K_n\}}^c \prod_{i=1}^n z(K_i) \quad (3.78)$$

Für $\log Z_{\beta, \Lambda_0}$ erhält man die Mayerentwicklung

$$\log Z_{\beta, \Lambda_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{K_1, \dots, K_n} \frac{\phi_c(K_1, \dots, K_n)}{n!} \prod_{i=1}^n z(K_i) \quad (3.79)$$

Lemma 3.11:

Es sei G endliche abel'sche Gruppe $U = \{g \in G : d(G, \mathbb{1}) = d_0\}$ und $\omega_3, \omega_4, e^{-b}$ seien die Konstanten

$$\omega_3 = \sum_{g \neq \mathbb{1}} e^{-\left(\kappa \frac{\beta}{N g^2}\right) d(g, \mathbb{1})}$$

$$\omega_4 = e^{\tilde{\omega}} - 1 \quad \tilde{\omega} = |U| \left| \frac{\beta g^2}{2 N d_0^2} \right|$$

$$e^{-b} = \left(\max \{ \omega_3, (\omega_3 + 1) \omega_4^{1/2(d-2)} \} \right)^{1/2}$$

Für $\beta > 0$, $g^2 \neq 0$ und ein beliebiges Polymer K ist dann $z(K)$ analytisch als Funktion von g^2 . Für $e^{-b} \leq 1$ ist

$$\sum_K' |z(K)| \leq e^{-b/\delta} \quad (3.80)$$

wobei die Σ' über Polymere K mit erweitertem co-Träger γ geht:

Beweis:

Es sei $\mathcal{L}$ die Menge der Hyperlinks in γ , $\mathcal{P}$ resp. $\mathcal{W}$ seien die Menge der Hyperplaketten resp. Hyperwürfel in γ ; L_t und $\tilde{P}_t$ seien die Mengen

$$L_i = \{ \ell \in \Lambda_o^{1+} : \tilde{c}(t, * \ell) \in \mathcal{W} \}$$

$$\tilde{P}_i = \{ p \in \Lambda_o^{2+} : \tilde{c}(t, * p) \in \mathcal{L} \}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum |z(K)| &= \\ &= \sum_{\substack{\ell_1, \dots, \ell_N \in \mathcal{L} \\ \text{supp } f_i = \tilde{P}_i}} \prod_{i=1}^N |(\psi^{\ell_i}, T(L_i) \psi^{\ell_{i+1}})| \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ich schätze nun zunächst Summen der Form

$$\sum_{\substack{\ell_1, \dots, \ell_N \in \mathcal{L} \\ \text{supp } f_i = \tilde{P}_i}} \prod_{i=1}^N |(\psi^{\ell_i}, T(t_{i,1}) \psi^{\ell_{i+1}})| \quad (3.82)$$

ab, wobei $t_{i,1}$ eine Funktion ist, die jedem $\ell \in L_i$ genau $n(i, \ell)$ Zeiten $t_{i,1}^1, \dots, t_{i,1}^{n(i, \ell)}$ zwischen 0 und 1 zuordnet ($n(i, \ell) \geq 1$). Vermittels (3.68) werden die Schranken an die Summe (3.82) die gesuchten Schranken an (3.81) ergeben.

Ich greife einen typischen Vertreter heraus, nämlich

$$V = \sum_{\substack{\ell_1, \dots, \ell_N \in \mathcal{L} \\ \text{supp } f_i = \tilde{P}_i}} \prod_{i=1}^N |(\psi^{\ell_i}, e^{s_i W} \tilde{D}_{\ell_i} e^{\tilde{s}_i W} \tilde{D}_{\tilde{\ell}_i} e^{s'_{i+1} W} \psi^{\ell_{i+1}})|$$

mit $0 \leq s_i, \tilde{s}_i, s'_{i+1} \leq 1, s_i + \tilde{s}_i + s'_{i+1} = 1$. Einfügen der Basis $\mathcal{B}$ ergibt

$$\begin{aligned} V &\leq \sum_{\substack{\ell_i, \tilde{\ell}_i \in \mathcal{L} \\ \text{supp } f_i = \tilde{P}_i}} \prod_{i=1}^N \{ e^{s_i \tilde{W}(\ell_i)} D_{\ell_i}(\ell_i, \tilde{\ell}_i) \times \\ &\quad \times e^{\tilde{s}_i \tilde{W}(\tilde{\ell}_i)} \tilde{D}_{\tilde{\ell}_i}(\tilde{\ell}_i, \ell_{i+1}) e^{s'_{i+1} \tilde{W}(\ell_{i+1})} \} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{W}(f) = \operatorname{Re} \left(\frac{\beta}{Nq^2} \right) \sum_{p \in \Lambda_0^{2+}} d(\mathbb{1}, f(p))$$

$$\tilde{D}_\ell(f, f') = |(\psi^\ell, \tilde{D}_\ell \psi f')|$$

Als nächstes bemerke ich, daß aufgrund der "Auswahlregeln" (3.74) nur Konturen $\tilde{f}_i$ mit $P_i \subset \operatorname{supp} f_i \subset \bar{P}_i$ zur obigen Summe beitragen, wobei P_i aus allen Plaketten $p \in \tilde{P}_i$ besteht, für die es kein Link $\ell \in L_i$ mit $\ell \in \partial p$ oder $-\ell \in \partial p$ gibt. $\bar{P}_i$ ist die Vereinigung von P_i mit allen Plaketten $p \in \Lambda_0^{2+}$, für die es ein $\ell \in L_i$ mit $\ell \in \partial p$ oder $-\ell \in \partial p$ gibt. Ich definiere

$$\chi_{P, \bar{P}}(f) = \begin{cases} 1 & P \subset \operatorname{supp} f \subset \bar{P} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist aufgrund des gerade gesagten

$$\begin{aligned} V &\leq \sum_{f_i, \tilde{f}_i \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^N \left\{ \chi_{P_i, \bar{P}_i}(f_i) e^{\alpha_i \tilde{W}(f_i)} \right. \\ &\quad \times \tilde{D}_{\ell_i}(f_i, \tilde{f}_i) \chi_{P_i, \bar{P}_i}(\tilde{f}_i) e^{\tilde{\alpha}_i \tilde{W}(\tilde{f}_i)} \\ &\quad \times \tilde{D}_{\tilde{\ell}_i}(\tilde{f}_i, f_{i+1}) \chi_{P_i, \bar{P}_i}(f_{i+1}) e^{\alpha'_{i+1} \tilde{W}(f_{i+1})} \end{aligned}$$

Die rechte Seite läßt sich als Spur in $\ell^2(\mathcal{C})$ auffassen. Anwenden der Hölder-Ungleichung ergibt die Schranke

$$V \leq \prod_{i=1}^N \left(\sum_{f_i: P_i \subset \operatorname{supp} f_i \subset \bar{P}_i} d^2 e^{\tilde{W}(f_i)} \right)$$

wobei d die Norm des Operators $\tilde{D}_\ell$ in $\ell^2(\mathcal{C})$ mit Kern $\tilde{D}_\ell(f, f')$ ist.

Abschätzen von d durch $\tilde{\omega}$ ergibt schließlich

$$V \leq \prod_{i=1}^N \{ \omega_3^{|P_i|} (1 + \omega_3)^{|\bar{P}_i \setminus P_i|} \tilde{\omega}^2 \}$$

Betrachtet man statt V den allgemeinen Term (3.82), so ist $\tilde{\omega}^2$ durch

$$\prod_{\ell \in L_i} \tilde{\omega}^{h(i, \ell)}$$

zu ersetzen. Vermittels (3.68) läßt sich (3.81) also durch

$$\prod_{i=1}^N \{ \omega_3^{|P_i|} (1 + \omega_3)^{|\bar{P}_i \setminus P_i|} \omega_4^{|L_i|} \}$$

abschätzen.

Da jedes Link $\ell \in \Lambda_o^{1+}$ in maximal $2(d-1)$ Plaketten aus Λ_o^{2+} enthalten ist, ist $|\bar{P}_i \setminus P_i| \leq 2(d-1)|L_i|$. Andererseits ist

$$|W| = \sum |L_i|$$

$$|P| = \sum |P_i|$$

und

$$|Q| = \sum |\tilde{P}_i| \leq \sum |\bar{P}_i| \leq$$

$$\leq \sum |P_i| + 2(d-1)|L_i| = |P| + 2(d-1)|W|$$

so daß

$$\begin{aligned}
 \sum_K |z(K)| &\leq \omega_3^{|P|} [\omega_4 (1 + \omega_3)^{2(d-1)}]^{|\mathcal{W}|} \\
 &\leq e^{-b_0 (|P| + 2(d-1)|\mathcal{W}|)} \\
 &\leq e^{-(b_0/2) (|P| + |\mathcal{W}| + |\mathcal{L}|)} \\
 &= e^{-(b_0/2) |\mathcal{X}|}
 \end{aligned}$$

ist, sofern nur

$$e^{-b_0} := \max \{ \omega_3, \omega_4^{1/2(d-1)} (1 + \omega_3) \} < 1$$

ist. Dies beweist die Ungleichung (3.80). Die Analytizitätseigenschaft von $z(K)$ beweist man ebenso wie die entsprechende Eigenschaft in Lemma 3.3; man beachte, daß G endlich ist und deshalb nur die Forderung $g^2 \neq 0$ benötigt wird (für diskrete, unendliche Gruppen G würde man die zusätzliche Forderung $\operatorname{Re}(1/g^2) > 0$ benötigen). ■

Korollar 3.12:

Es sei G endliche Gruppe. $\mathcal{X}(\cdot)$ sei die (den Hamiltonoperator bestimmende) Spur in einer treuen Darstellung und $d \geq 2$ sei die Raumdimension. Dann gibt es (nur von G , $\mathcal{X}$ und d abhängende) Konstanten $q_1^2 > 0$ und $\beta_1 > 0$, so daß gilt: $\forall \beta > 0 \forall g^2$ mit

$$\operatorname{Re} \frac{1}{g^2} > \frac{1}{\tilde{q}^2(\beta)} = \frac{1}{q_1^2} \max \{ 1, \beta_1 / \beta \} \quad (2.83)$$

$\exists N \in \mathbb{N}$, so daß die Mayerentwicklung (3.79) absolut konvergiert. $\log Z_{\beta, \Lambda_0}$ ist als Funktion von g^2 im Gebiet

$$\mathcal{G}_1(\beta) = \{ g^2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Re} \frac{1}{g^2} > \frac{1}{\tilde{q}^2(\beta)} \}$$

analytisch ($\beta > 0$).

Der folgende Satz bedarf an dieser Stelle keines expliziten Beweises mehr.

Satz 3.13:

i) Es sei $d \geq 2$, $\beta > 0$ und $\operatorname{Re}(1/g^2) > \tilde{g}^{-2}(\beta)$. Dann existiert der thermodynamische Limes

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \langle A \rangle_{\beta, \Lambda} =: \langle A \rangle_{\beta}$$

$\forall A \in \mathcal{A}$. $\langle \cdot \rangle_{\beta}$ ist translationsinvariant und für $A \in \mathcal{A}$ ist $\langle A \rangle_{\beta}$ analytisch im Gebiet $\mathcal{G}_1(\beta)$.

ii) Für $\beta > 0$ und $\operatorname{Re}(1/g^2) > \tilde{g}^{-2}(\beta)$ gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß

$$\begin{aligned} | \langle AB \rangle_{\beta} - \langle A \rangle_{\beta} \langle B \rangle_{\beta} | &\leq \\ &\leq K_{AB} e^{-Md(A,B)} \end{aligned}$$

ist, mit einer Konstanten K_{AB} , die invariant unter Translationen von A oder B ist. $d(A,B)$ ist der Abstand von $\operatorname{supp} A$ und $\operatorname{supp} B$.

iii) $\forall g^2$ mit $\operatorname{Re}(1/g^2) > g_1^{-2}$ existiert der volle "thermodynamische Limes (3.8)". $\langle \cdot \rangle$ ist translationsinvariant und $\forall A \in \mathcal{A}$ läßt sich $\langle A \rangle$ als Funktion von g^4 im Gebiet

$$\mathcal{G}_1 = \{ g^4 \in \mathbb{C} : |g^4| < g_1^4 \}$$

analytisch fortsetzen. Es gelten außerdem die zu Satz 3.7 ii) resp. iii) analogen Aussagen, d.h. $\forall g^2 > 0$ mit $g^2 < g_1^2$ existiert der Hamiltonoperator H im thermodynamischen Limes und weist ein "Massengap" auf.

Satz 3.14:

Es sei $d \geq 3$, $\beta > 0$ und $\operatorname{Re}(1/g^2) > \tilde{g}^{-2}(\beta)$. Dann gilt das Umfangsgesetz

$$|\langle w_q(C) \rangle| \geq e^{-\gamma|C|}$$

mit einer Konstanten $\gamma < \infty$, die nicht von C abhängt.

Anmerkung:

i) In der $d+1$ dimensionalen Theorie auf einem symmetrischen Gitter gilt stets das Flächengesetz. Mit Hilfe einer Korrelationsgleichung (siehe [Borgs, 1985]) folgert man hieraus, daß $\langle w_q(C) \rangle_\beta$ in $2+d$ Dimensionen $\forall g^2 > 0$ und $\beta < \infty$ dem Flächengesetz folgt.

Beweis von Satz 3.14:

Ich betrachte die modifizierte Zustandssumme

$$Z_{\beta, \Lambda_0}(C) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_{\Lambda_0}} W_q(C) T^N$$

Da $W_q(C)$ in der Konturbasis $\mathcal{B}$ diagonal ist und $\forall f \in \mathcal{C}$ mit $f = f_1 + \dots + f_n$, $f_i \in \mathcal{C}$

$$\langle \psi^f, W_q(C) \psi^f \rangle = \prod_{i=1}^n \langle \psi^{f_i}, W_q(C) \psi^{f_i} \rangle$$

ist, schreibt sich $Z_{\beta, \Lambda_0}(C)$ als Zustandssumme mit modifizierten Aktivitäten

$$Z_{\beta, \Lambda_0}(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\{K, \dots, K, \beta\}}^C \prod_{i=1}^n z_C(K_i)$$

wobei für eine Konfiguration $K = (f_1, \dots, f_N, L_1, \dots, L_N)$

$$z_C(K) = z(K) \prod_{i=1}^N \langle \psi^{f_i}, W_q(C) \psi^{f_i} \rangle \quad (3.84)$$

ist. Die Mayerentwicklung für $Z_{\beta, \Lambda_0}(C)$, kombiniert mit derjenige für Z_{β, Λ_0} ergibt

$$\log \langle w_q(C) \rangle_{\beta, \Lambda_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{K_1, \dots, K_n} \frac{\phi_C(K_1, \dots, K_n)}{n!} \left(\prod_{i=1}^n z_C(K_i) - \prod_{i=1}^n z(K_i) \right)$$

Unter Verwendung der Teleskopregel und der Schranke

$$|z_C(K)| \leq |z(K)|$$

erhält man hieraus die Ungleichung

$$\log \langle w_q(C) \rangle \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{K_1, \dots, K_n} \left| \frac{\phi_C(K_1, \dots, K_n)}{n!} \right| \times \\ \times |z_C(K_1) - z(K_1)| \prod_{i=2}^n z(K_i)$$

Das weitere Vorgehen entspricht dem von der Wilson'schen Theorie her bekannten Vorgehen (siehe z.B. [Seiler 1982]). Man beachte, daß es in drei und mehr Raumdimensionen nicht mehr als $|C| \text{ const}^S$ Konturen f mit co-zusammenhängenden Trägern der Größe s gibt, für die $(\psi^f, w_q(C)\psi^f) \neq 1$ ist, da sich f hierzu um C "herumwinden" muß. ■

Anmerkungen:

ii) Die in diesem Abschnitt vorausgesetzte Endlichkeit der abelschen Gruppe G ist nicht wesentlich, es genügt, Diskretheit anzunehmen, da nur die Endlichkeit von U (siehe Lemma 3.11) eingeht. Der "endliche Temperatur"-Formalismus bedarf für nicht kompakte Gruppen jedoch einer gewissen Modifikation (siehe [Nill, 1986]).

iii) Die hier verwendete "Quantenkontur"-Entwicklung hat diverse Resultate für die Erwartungswerte lokaler Observablen $A \in \mathcal{A}$ (einschließlich horizontaler Wilson-Loops) ergeben. Es ist jedoch zumindestens für mich nicht offensichtlich, wie man mit ihrer Hilfe Deconfinement im Sinne von Polyakov zeigen kann. Dies heißt jedoch nicht, daß die Theorie kein Deconfinement im Gebiet $\mathcal{G}_1(\beta)$ aufweist. Tatsächlich läßt sich dies in 2 und mehr Raumdimensionen in einem gewissen Teilgebiet von $\mathcal{G}_1(\beta)$ zeigen (siehe Anm. iv)).

iv) Der Deconfinement-Beweis von Borgs und Seiler funktioniert auch für diskrete Gruppen, aber (wie auch für kontinuierliche Gruppen) nur für $d \geq 3$. Tatsächlich gibt es jedoch bei endlichen abelschen Gruppen $\forall d \geq 2$ eine Konstante $K(d)$, so daß die Theorie für $0 < g^2/\beta < K(d)$ in der Deconfinement-Phase ist.

Vermittels einer Korrelationsungleichung läßt sich die "Zweipunkt-Funktion"

$$G_{q, \bar{q}}^{\beta}(x, y) = e^{-\beta F_{q \bar{q}}^{\beta}(x, y)}$$

nämlich durch die Zweipunkt-Funktion $\tilde{G}_{qq}^{\beta}(x, y)$ ohne Potential nach unten abschätzen ($g^2 > 0$ vorausgesetzt). Letztere kann man aber als Zweipunkt-Funktion in einem G-wertigen Spinsystem mit inverser Temperatur β/g^2 schreiben. Langreichweitige Ordnung für dieses Spinsystem für $g^2/\beta < K(d)$ impliziert das gesuchte Deconfinement.

3.5 Zusammenfassung und Diskussion zu Kapitel 3

In diesem Kapitel habe ich reine Gitter-Yang-Mills-Theorien mit kontinuierlicher Zeit betrachtet. Nach der Diskussion mehr konzeptioneller Fragen habe ich eine Clusterentwicklung für die stark gekoppelte Theorie hergeleitet und deren Konvergenz für Kopplungen g^2 mit

$$Re\, g^2 > \bar{g}^2(\beta) = g_0^2 \max\{1, \beta_0 / \beta\} \quad (3.85)$$

gezeigt⁵⁾. Es folgten insbesondere Confinement im Sinne von Polyakov, exponentiellen Clustern und "Flächengesetz" für horizontale Wilson-Loops.

Außerdem habe ich eine "Quanten-Kontur"-Entwicklung für diskrete abelsche Gruppen hergeleitet und ihre Konvergenz für

$$Re\, \frac{1}{g^2} > \frac{1}{\bar{g}^2(\beta)} = \frac{1}{g_1^2} \max\{1, \beta_1 / \beta\} \quad (3.86)$$

bewiesen. Ich konnte dann (für Kopplungen g^2 , die der Schranke (3.86) genügen) exponentielles Clustern für lokale Observable ($d \geq 2$) und das Umfangsgesetz für horizontale Wilson-Loops zeigen ($d \geq 3$)⁶⁾. Mit Hilfe einer Korrelationsungleichung wurde Deconfinement im Sinne von Polyakov für Kopplungen $g^2 < \text{const } \beta^{-1}$ gezeigt ($d \geq 2$).

Um diese Ergebnisse zu diskutieren, stelle ich sie den Resultaten aus [Borgs, Seiler, 1983] und [Borgs, 1985] gegenüber. Ich betrachte zunächst die Gruppen $U(N)$ und $SU(N)$. Für die Theorie mit kontinuierlicher Zeit wurde Deconfinement im Sinne von Polyakov gezeigt, vorausgesetzt die Raumdimension d ist größer als zwei und g^2 genügt einer Schranke der Form

5) g_0^2 , β_0 sind geeignete Konstanten, die von der Raum-Zeit-Dimension $\nu=d+1$ und der betrachteten Gruppe G abhängen, siehe Lemma 3.5.

6) Für $d=2$ impliziert eine Korrelationsungleichung stets das Flächengesetz, siehe Anmerkung i), Abschnitt 3.4.

$$0 < g^2 < \text{const } \beta^{-1} \quad (3.87)$$

[Borgs, Seiler, 1983].

Da das Abfallverhalten horizontaler Wilson-Loops bei nicht verschwindender Temperatur nicht als Confinementkriterium benutzt werden kann (siehe z.B. [Svetitsky, Yaffe, 1982]), müssen horizontale Wilson-Loops im Gebiet (3.87) nicht unbedingt dem Umfangsgesetz folgen. Tatsächlich gibt es überzeugende Argumente ([Svetitsky, Yaffe, 1982], [Borgs, 1985]) dafür, daß horizontale Wilson-Loops bei nicht verschwindender Temperatur stets dem Flächengesetz genügen, vorausgesetzt G ist gleich $U(1)$ oder $SU(N)$ und $d \leq 3$ bzw. $d \leq 4$. Für $G = U(1)$ kann dies streng gezeigt werden, für allgemeine Gruppen läßt sich dies zumindestens für Kopplungen g^2 mit

$$g^2 > \text{const}' \beta \quad (3.88)$$

zeigen.

Ich fasse das bisher gesagte in Abbildung 3.2 zusammen; I bezeichnet die Deconfinementregion gemäß Borgs und Seiler, II die Confinementregion gemäß Abschnitt 3.2. Außerdem ist die vermutete Phasentrennlinie Γ zwischen der Confinement und der Deconfinementregion eingezeichnet ($d+1 = 4$, $G = U(1)$ bzw. $SU(N)$). Das Flächengesetz für horizontale Wilson-Loops ist für $G = U(1)$ für alle nicht verschwindenden Temperaturen und alle Kopplungen $g^2 > 0$ gezeigt, für $G = SU(N)$ sollte dasselbe gelten (gezeigt ist es nur im Bereich 3.88), die entsprechende Schranke ist als gestrichelte Linie eingezeichnet). Exponentielles Clustern schließlich ist im Bereich II gezeigt, es sollte für $G = SU(N)$ aber sowohl in der Confinement als auch in der Deconfinementphase gelten (zumindestens für $N = 2, 3$, siehe [Svetitsky, Yaffe, 1982]). Für große N könnte die Deconfinement-Phase in Analogie zu den Z_N -Spin-Modellen in eine Coulomb-Phase und in eine Phase mit exponentiellem Clustern zerfallen (vgl. [Borgs, Seiler, 1983]). Im abelschen Fall $G = U(1)$ erwartet man kein exponentielles Clustern in der Deconfinementphase.

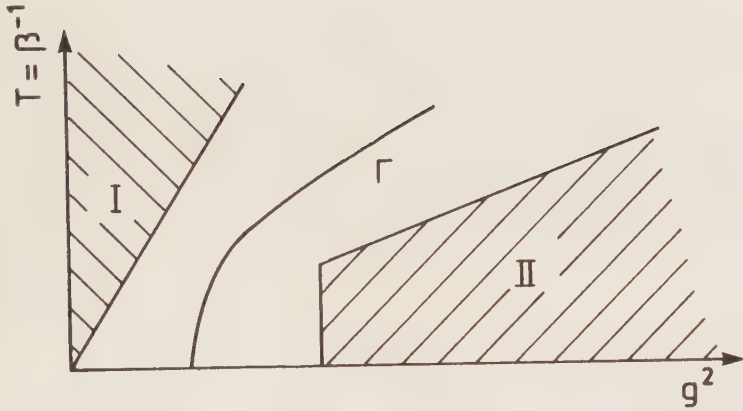


Abb. 3.2a: Das Phasendiagramm im τ -Kontinuum für $G = U(1)$ und $d+1 = 4$.

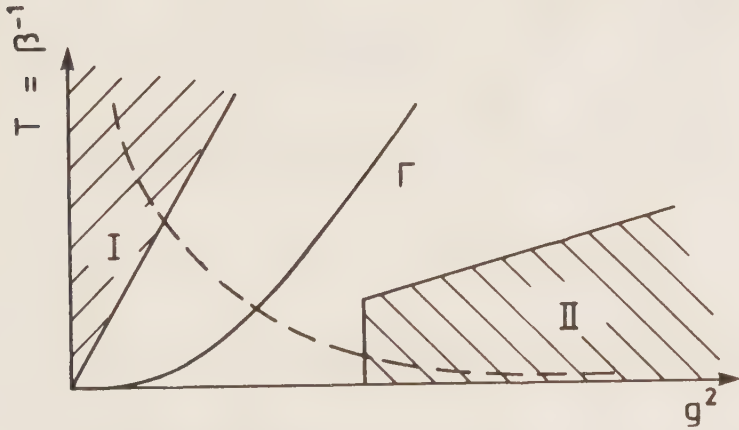


Abb. 3.2b: Das Phasendiagramm im τ -Kontinuum für $G = SU(N)$ und $d+1 = 4$.

Das Phasendiagramm für endliche abelsche Gruppen unterscheidet sich wesentlich von den bisher besprochenen Phasendiagrammen, siehe Abb. 3.3. Neben der Confinementphase gemäß Abschnitt 3.2/3.3 (in Abb. 3.3 wieder mit II bezeichnet) und der Deconfinementphase mit Deconfinement, aber weiter gültigem Flächengesetz für horizontale Wilson-Loops ([Borgs, 1985], in Abb. 3.3 mit Ib bezeichnet) gibt es noch die eingefrorene Phase mit Umfangsgesetz für horizontale Wilson-Loops (Abschnitt 3.4, in Abb. 3.3 mit Ia bezeichnet)⁷⁾, vorausgesetzt $d \geq 3$ ⁸⁾. Deconfinement im Sinne von Polyakov ist nur in dem Teilgebiet von Ia gezeigt, für das (3.87) gilt, sollte aber im ganzen Gebiet Ia wahr sein.

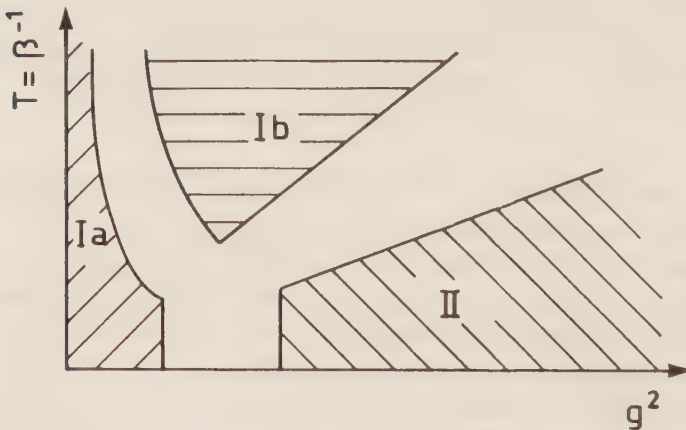


Abb. 3.3: Das Phasendiagramm im τ -Kontinuum für endliche abelsche Gruppen und $d+l = 4$.

⁷⁾ Das Gebiet Ia entspricht der Ungleichung (2.86), Ib der gleichzeitigen Gültigkeit von (3.87) und (3.88), und II der Ungleichung (3.85).

⁸⁾ Siehe Fußnote 6, Seite 160.

Exponentielles Clustern wurde sowohl im Gebiet Ia als auch im Gebiet II gezeigt, nicht aber im Gebiet Ib. Die folgende Clusterentwicklung konvergiert jedoch (bei geeigneter Wahl der Konstanten in (3.87)/(3.88)) im Gebiet Ib und impliziert auch exponentielles Clustern in Ib.

Ich betrachte zunächst die Theorie ohne Potential. Diese entspricht einem G-wertigen klassischen Spinsystem in d Dimensionen und kann mit der üblichen Peierls-Kontur Entwicklung behandelt werden, vorausgesetzt die Temperatur βg^2 dieses Spinsystems ist klein genug. Zur Berücksichtigung des Potentials kombiniere man diese Entwicklung mit der Duhamel-Entwicklung oder der Trotter-Formel. Die resultierende kombinierte "Hoch/Tiefteperatur"-Entwicklung konvergiert, vorausgesetzt βg^2 und β/g^2 sind hinreichend klein.

Zum Schluß dieses Abschnitts möchte ich schließlich noch die Analytizitätseigenschaften der Saitenspannung σ_q für die Theorie mit kontinuierlicher Zeit diskutieren. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf $\beta^{-1} = 0$.

Statt der Theorie mit Hamiltonoperator H_{Λ_0} betrachte ich wieder die reskalierte Theorie mit Hamiltonoperator

$$H_{\Lambda_0}' = \frac{1}{g^2} H_{\Lambda_0}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\langle x, y \rangle} \Delta_{xy} - \frac{2}{g^4} \sum_f \text{Re } \chi(g_f)$$

Die Saitenspannung $\sigma_q^{(P)}$ der ursprünglichen Theorie geht aus der Saitenspannung $\sigma_q'^{(P)}$ der reskalierten Theorie gemäß

$$\sigma_q^{(P)}(g) = g^2 \sigma_q'^{(P)}(g^2)$$

hervor. Das folgende Quasi-Theorem erhält man durch Kombination der Methoden aus Kapitel 2 und 3.

Quasi-Theorem 3.15

Es sei $\nu = d+1 \geq 3$. Die Quark-Ladung q entspreche der im Hamilton-Operator verwendeten Darstellung und diese stellt das Zentrum von G nicht trivial dar. Dann gibt es eine Konstante $\tilde{g}_0^2$, so daß gilt: die Saitenspannung $\sigma_q^{(P)}$ ist zu einer im Gebiet

$$\left\{ \frac{1}{g^4} \in \mathbb{C} : \left| \frac{1}{g^4} \right| < \frac{1}{\tilde{g}_0^4} \right\}$$

analytischen Funktion von $1/g^4$ fortsetzbar.

"Beweis":

Die Zweipunkt-Funktion in der reskalierten Theorie sei mit $\tilde{G}_{qq}^B$ bezeichnet. Man fixiere eine später zu bestimmende Konstante $\varphi > 0$ und betrachte die Clusterentwicklung aus Abschnitt 3.3 für $\tilde{G}_{qq}^{B=N}(\varphi, \ell e_1)$, wobei e_1 der Einheitsvektor in der 1-Richtung in Λ_0 ist. C_0 und C_ℓ seien die beiden Polyakov-Loops in $\Lambda = \{1, \dots, N\} \times \Lambda_0$, die durch die Punkte $(0,0)$ und $(0, \ell e_1)$ in Λ gehen.

Da die Aktivität der Polymere ohne Würfel von g^2 unabhängig ist, während die Aktivität eines Polymers mit k Würfeln wie g^{-4k} fällt, wenn g^2 gegen ∞ geht, enthält das führende Polymer bei hinreichend großen g^2 keine Würfel aus Λ . Es besteht dann aus den Plaketten der Minimalfläche S_0 in Λ , die durch C_0 und C_ℓ berandet ist.

Die Abweichung von S_0 behandle man wie in Kapitel 2 als Gas von Anregungen über S_0 . Da die Aktivität von Anregungen aus Plaketten mit steigendem φ fällt, während die Aktivität der Anregungen aus Würfeln mit kleiner werdendem φg^{-4} fällt, sollte es möglich sein, φ und $\tilde{g}_0^2$ so zu wählen, daß die resultierende Mayer-Entwicklung für $|g^2| > \tilde{g}_0^2$ konvergiert.

Ein vollständiger Beweis bedarf allerdings im Detail zusätzlicher Arbeit, da das Auftreten von Würfeln die geometrische Analyse der resultierenden Zufallsflächen verkompliziert. ■

Mit den folgenden Bemerkungen will ich diesen Abschnitt abschließen.

Bemerkungen:

i) Der oben angedeutete "Beweis" würde natürlich nicht nur die Analytizität von $\sigma_q^{(P)}/g^2$ liefern, sondern ebenso die Analytizität des (reskalierten) Quark-Antiquark-Potentials $V_{qq}^{(P)}/g^2$ als Funktion von $1/g^4$ für $|g^2| > \tilde{g}_0^2$ und ebenso die zu Satz 2.21 analogen Aussagen über das asymptotische Verhalten von $V_{qq}^{(P)}$.

ii) Durch Kombination der Methoden aus 3.2/3.3 mit denen von Bricmont und Fröhlich sollte sich die analoge Aussage über das Massengap M , nämlich die Analytizität von M/g^2 als Funktion von $1/g^4$ (für $|g^2| > \tilde{g}_0^2$, beweisen lassen.

Schlußbemerkungen

In dieser Arbeit wurden verschiedene Fragen im Zusammenhang mit dem Confinementproblem diskutiert. Es wurden⁹ Aussagen über das asymptotische Verhalten des Quark-Antiquark-Potentials in der stark gekoppelten Theorie auf einem symmetrischen Raum-Zeit-Gitter bewiesen; für Darstellungen q , die das Zentrum der Eichgruppe nicht trivial darstellen, wurde insbesondere bewiesen, daß die Saitenspannung σ_q bis auf einen führenden Logarithmus analytisch als Funktion von $1/g^2$ ist; für Darstellungen, die das Zentrum trivial darstellen, wurde gezeigt, daß der "Wilson-Loop" dem Umfangsgesetz folgt. Für die Gitter-Yang-Mills-Theorien mit kontinuierlicher Zeit wurde die Existenz einer Confinementphase bei starken Kopplungen und einer eingefrorenen Phase bei schwachen Kopplungen bewiesen; letzteres unter der Voraussetzung, daß die Eichgruppe diskret und abelsch ist.

Es bleiben jedoch einige wichtige Fragen im Zusammenhang mit dem Confinementproblem ungelöst. Insbesondere steht der Beweis dafür, daß die 3+1 dimensionale $SU(N)$ Theorie bei Temperatur Null für alle Kopplungen g^2 in der Confinementphase ist, weiterhin aus, und zwar sowohl für symmetrische Raum-Zeit-Gitter, als auch im Limes kontinuierlicher Zeit. Offenbar erfordert ein solcher Beweis Renormierungsgruppenmethoden, aber die bisher entwickelten Methoden (siehe Einleitung) eignen sich nur zur Analyse des Ultraviolettproblems ("=" Kontinuumlimes), nicht aber zur Analyse des Confinementproblems. Auch wenn im Zusammenhang mit dem (bisher auch nicht gelösten) Ultraviolettproblem durchaus interessante Fragestellungen auftreten, z.B. den Übergang von einer vollständigen Eichung zu einer im Kontinuum renormierbaren Eichung betreffend, erscheint mir dies eigentlich interessante, weil nicht störungstheoretische Problem das Confinementproblem.

⁹Für eine ausführliche Zusammenfassung sei auf die Abschnitte 2.6 und 3.5 verwiesen.

Eine weitere offene Frage betrifft die Existenz einer Coulombphase in der 3+1 dimensionalen $U(1)$ -Theorie mit kontinuierlicher Zeit bei Temperatur Null. Hoffnungsvollerweise sollte sich die Existenz einer solchen Phase jedoch durch Kombination der Methoden aus [King, 1986] mit denen aus Kapitel 3 zeigen lassen.

Ich möchte schließlich noch einige Fragen im Zusammenhang mit dem Higgsmechanismus bei kontinuierlicher Zeit diskutieren, wobei ich mich der Einfachheit halber auf Higgsfelder mit fixierter Länge beschränke. Die Entwicklung aus Abschnitt 3.2 läßt sich sofort auf diesen Fall übertragen und liefert für große Kopplungen g^2 und kleine Hoppingsparameter α unter anderem exponentielles Clustern für die Erwartungswerte eichinvarianter Observablen. Interessanter wäre allerdings eine Entwicklung, die in einem zusammenhängenden Gebiet in der $(\frac{1}{g}, \alpha)$ -Ebene konvergiert, welche die "Confinementregion" ($\frac{1}{g}$ und α klein) mit der "Higgsregion" ($\frac{1}{g}$ und α groß) verbindet¹⁰. Man würde hierzu zunächst in die unitäre Eichung gehen, und dann die Methoden aus Abschnitt 3.2/3.3 anwenden. Erste Versuche in dieser Richtung zeigen erhebliche Komplikationen sowohl gegenüber [Osterwalder, Seiler, 1978] als auch gegenüber Abschnitt 3.2/3.3, erscheinen aber aussichtsreich [Borgs, Nill, 1986b].

Ein weiteres interessantes Problem betrifft den Vakuumerwartungswert $\langle \phi \rangle$ des Higgsfeldes in der abelschen Theorie mit nicht kompakten Eichfeldern: läßt sich zeigen, daß $\langle \phi \rangle$ in Coulomb-Eichung (und 3+1 Dimensionen) nicht verschwindet, sofern $1/\alpha$, g^2 und die Temperatur $T = \beta^{-1}$ klein genug gewählt werden¹¹? Da King und Jaffe auf der anderen Seite gezeigt haben,

¹⁰Für symmetrische Gitter wurde eine solche Entwicklung erstmals von Osterwalder und Seiler hergeleitet [1978].

¹¹Für die Theorie auf dem symmetrischen Raum-Zeit-Gitter läßt sich dies mit den Methoden von King und Kennedy [1986] zeigen, vgl. auch [Borgs, Nill, 1986a].

daß $\langle \phi \rangle$ in 3+1 Dimension für beliebige Kopplungen und Hoppingparameter verschwindet, vorausgesetzt die Temperatur ist hoch genug, wäre damit gezeigt, daß es möglich ist, die Theorie durch Abkühlen von einer "symmetrischen Phase" in die Higgsphase zu befördern. Die Existenz eines solchen Übergangs ist von zentraler Bedeutung für viele der heutigen kosmologischen Theorien¹².

Zum Schluß möchte ich noch die Frage diskutieren, welcher Version der Gittereichttheorien der Vorzug zugeben ist: derjenigen auf dem symmetrischen Gitter gemäß Wilson, oder derjenigen mit kontinuierlicher Zeit, gemäß Kogut und Susskind.

In vieler Hinsicht ist die Theorie von Wilson analytisch besser handhabbar, da die Methoden der klassischen statistischen Mechanik anwendbar sind. Bezüglich der Konstruktion einer Kontinuumsstheorie bietet sie den Vorteil, die euklidischen Raum-Zeit-Symmetrien weniger zu verletzen als die Theorie mit kontinuierlicher Zeit.

In der Theorie mit kontinuierlicher Zeit ist die maximal mögliche Temperatur nicht nach oben begrenzt, so daß sich diese Version bei hohen Temperaturen als realistischer erweist. Außerdem bietet sie den konzeptionellen Vorteil der direkten quantenmechanischen Interpretierbarkeit.

Die obige Frage erweist sich also als eine Geschmacksfrage, deren Beantwortung auch etwas von der gewählten Problemstellung abhängt. Bei hohen Temperaturen mag man die Theorie mit kontinuierlicher Zeit vorziehen, zur Konstruktion eines Kontinuumsmodells die Theorie auf dem symmetrischen Raum-Zeit-Gitter. Letztlich sollten beide Versionen jedoch zu derselben Kontinuumsstheorie führen.

¹²für weitere Diskussionen zum Higgsmechanismus siehe [Nill, 1986].

Anhang

Anhang A: Ungleichungen für das Quark-Antiquark-Potential

In diesem Anhang möchte ich die in Kapitel 1 behauptete Ungleichung

$$\sigma_q^{(W)} \geq \sigma_q^{(P)} \geq \tilde{\sigma}_q^{(P)} \quad (\text{A.1})$$

beweisen; ich rufe in Erinnerung, daß $\sigma_q^{(P)}$ und $\tilde{\sigma}_q^{(P)}$ aus der freien Energie $F_{q\bar{q}}^\beta(\ell)$ des Quark-Antiquark-Paares $q\bar{q}$ vermittelt

$$V_{q\bar{q}}^{(P)}(\ell) = \liminf_{\beta \rightarrow \infty} F_{q\bar{q}}^\beta(\ell) \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_q^{(P)} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} V_{q\bar{q}}^{(P)}(\ell) \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{\sigma}_q^{(P)} = \liminf_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell} F_{q\bar{q}}^\beta(\ell) \quad (\text{A.4})$$

hervorgehen. Die Ungleichung (A.1) folgt relativ direkt durch Kombination der Ergebnisse von [Seiler, 1978] und [Tomboulis, Yaffe, 1985]. Der besseren Übersichtlichkeit halber will ich die benötigten Lemmas noch einmal formulieren, um dann (A.1) zu beweisen.

Ich werde die Existenz des thermodynamischen Limes $\Lambda \rightarrow \mathbb{L}_\beta$ resp. $\Lambda \rightarrow \mathbb{L}$ voraussetzen, und desweiteren annehmen, daß die resultierenden Zustände $\langle \cdot \rangle_\beta$ resp. $\langle \cdot \rangle$ translationsinvariant und reflexionspositiv sind. Schließlich werde ich benötigen, daß für beliebige Wilson Loops $C_{t\ell}$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle_\beta = \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle \quad (\text{A.5})$$

ist. Im folgenden steht $W_B^q(t, \ell)$ resp. $G_B^q(\ell)$ für

$$W_B^q(t, \ell) = \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle_B \quad (A.6)$$

$$G_B^q(\ell) = \langle \overline{L_q(x)} L_q(y) \rangle \quad (A.7)$$

mit $y = x + \ell \hat{e}_1$. W_q und L_q sind wie in Abschnitt 1.1 normiert. Um die Notation zu vereinfachen, setze ich $\varepsilon = \tau = 1$. Damit sind t und ℓ stets nicht-negative ganze Zahlen und es wird $B = L_t \in \mathcal{V}$. Schließlich rufe ich die Definition von $V_{qq}^{(W)}$ und F_{qq}^B in Erinnerung:

$$V_{q\bar{q}}^{(W)}(\ell) := - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle W_q(C_{t\ell}) \rangle \quad (A.8)$$

$$F_{q\bar{q}}^B(\ell) := - \frac{1}{B} \log(d_q^4 G_B^q(\ell)) \quad (A.9)$$

Lemma A.1: ([Seiler, 1978], [Borgs, Seiler, 1983])

$V_{qq}^{(W)}(\ell)$ und $F_{qq}^B(\ell)$ wachsen mit ℓ ;

$V_{qq}^{(W)}(\ell)/\ell$ und $(F_{qq}^B(\ell) - F_{qq}^B(0))$ fallen mit ℓ .

Bemerkung:

i) Das Quark-Antiquark Potential ist also stets anziehend; aber die Kraft nimmt mit dem Abstand ℓ ab.

ii) Aus Lemma A.1 folgert man sofort, daß $V_{qq}^{(W)}(\ell) \geq \sigma_q^{(W)} \cdot \ell$ und $F_{qq}^B(\ell) - F_{qq}^B(0) \geq \sigma_{q,B}^{(P)} \cdot \ell$ ist.

Lemma A.2: ([Tomboulis, Yaffe, 1985])

Für $t \leq L_t/2$ ist $W_B^q(t, \ell)^{1/t} \leq (d_q^2 G_B^q(\ell))^{1/L_t}$

Lemma A.1 und A.2 sind eine direkte Konsequenz aus der Reflexionspositivität von $\langle \cdot \rangle_\beta$ und $\langle \cdot \rangle$. Ich möchte hier darauf verzichten, den Beweis noch einmal vorzuführen, da er in den zitierten Veröffentlichungen ausgeführt ist. Unter Benützung von Lemma A.1 und A.2 beweise ich nun

Satz A.3:

- i) $V_{q\bar{q}}^{(W)}(\ell) \geq V_{q\bar{q}}^{(P)}(\ell)$
- ii) $\sigma_q^{(W)} \geq \sigma_q^{(P)} \geq \tilde{\sigma}_q^{(P)}$

Beweis:

i) folgt sofort aus Lemma A.2. Man lasse zunächst β (und damit L_t) und dann t gegen ∞ gehen.

ii) Ich zeige zunächst, daß

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F_{q\bar{q}}(0) = 0 \quad (\text{A.10})$$

ist. Man betrachte hierzu die Clebsch-Gordan-Zerlegung

$$\chi_q(q_{c_x}) \chi_q(q_{c_x}) = 1 + \sum_{i=1}^n n_i \chi_{q_i}(q_{c_x})$$

($n_i > 0$) und beachte, daß

$$\langle \chi_{q_i}(q_{c_x}) \rangle_\beta \geq 0$$

ist. Es folgt, daß $G_\beta^q(0) \geq d_q^{-2}$ ist.

Andererseits ist offensichtlich $G_\beta^q(0) \leq 1$. Zusammen mit der Definition (A.9) erhält man die Gleichung (A.10).

Vermittels (A.10) ergibt sich nun aus Lemma A.1 (vgl. Bem. ii)) die Ungleichung

$$\tilde{\sigma}_q^{(P)} = \liminf_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_{q,\beta}^{(P)} \leq \frac{1}{\ell} V_{q\bar{q}}^{(P)}(\ell)$$

Also ist $\tilde{\sigma}_q^{(P)} \leq \tilde{\sigma}_q^{(P)}$ (man verwende (A.3)). Die Ungleichung $\sigma_q^{(P)} \leq \sigma_q^{(W)}$ folgt aus Satz A.3, Teil i). ■

Anhang B: Die Mayerentwicklung für Polymersysteme

Die Mayerentwicklung für Polymersysteme ist inzwischen wohl bekannt (siehe z.B. [Seiler, 1982] oder [Brydges, 1984]). Der Vollständigkeit halber will ich hier jedoch die wesentlichen Schritte wiederholen.

Es sei Γ_o eine endliche Menge, deren Elemente Polymere genannt werden. Auf Γ_o sei eine Relation "kompatibel" $\gamma \sim \gamma'$ definiert, so daß $\gamma \not\sim \gamma'$ für alle $\gamma \in \Gamma_o$. Für Teilmengen $\Gamma \subset \Gamma_o$ definiert man $\gamma \not\sim \Gamma$, falls Γ ein Polymer γ' mit $\gamma' \not\sim \gamma$ enthält. Ein Polymer Modell ist gegeben durch die Zuordnung einer Aktivität $z(\gamma) \in \mathbb{C}$ zu jedem $\gamma \in \Gamma_o$. Man definiert die Zustandssumme

$$Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}}^C \prod_{i=1}^n z(\gamma_i) \quad (\text{B.1})$$

wobei die Summe $\sum^C$ über Mengen $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subset \Gamma_o$ von paarweise kompatiblen Polymeren geht.

Es seien nun $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ beliebige, nicht notwendig paarweise verschiedene Polymere aus Γ_o und $G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ sei der Graph auf $1, \dots, n$, der eine Linie ij immer dann enthält, wenn $i \neq j$ und $\gamma_i \not\sim \gamma_j$ ist. Es sei ferner für $n \geq 2$

$$\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{C \subset G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} (-1)^{\ell(C)} \quad (\text{B.2})$$

wobei die Summe über zusammenhängende Teilgraphen C auf $1, \dots, n$ geht und $\ell(C)$ die Zahl der Linien in C bezeichnet. Für $n=1$ sei $\phi_c(\gamma_1) = 1$ für alle $\gamma_1 \in \Gamma_o$. Dann gilt der wohlbekannte

Satz B.1:

$$\ln Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_o} \phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \prod_{i=1}^n z(\gamma_i) \quad (\text{B.3})$$

im Sinne einer formalen Potenzreihe in den Aktivitäten $z(\gamma)$.

Beweis:

Es sei $\varphi(\gamma, \gamma') = 0$ für $\gamma \sim \gamma'$ und $\varphi(\gamma, \gamma') = -1$ für $\gamma \not\sim \gamma'$. Dann wird

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \prod_{i=1}^n z(\gamma_i) \phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

mit

$$\begin{aligned} \phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &:= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 + \varphi(\gamma_i, \gamma_j)) \\ &= \sum_{G \text{ auf } N} \prod_{ij \in G} \varphi(\gamma_i, \gamma_j) \end{aligned}$$

wobei die Summe über Graphen G auf $N = \{1, \dots, n\}$ geht. Wir zerlegen nun jedes solche G in zusammenhängende Teilgraphen. Vermittels der Notation

$$\phi_c(M) = \begin{cases} 0 & \text{für } |M| = 0 \\ 1 & \text{für } |M| = 1 \\ \sum_{\text{C auf } M} \prod_{ij \in C} \varphi(\gamma_i, \gamma_j) & \text{für } |M| \geq 2 \end{cases}$$

für Teilmengen $M \subset N$ (die Summe geht über zusammenhängende Graphen C auf M) erhält man dann eine Darstellung von $\phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ als Summe über Partitionen P von N :

$$\begin{aligned} \phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= \sum_P \prod_{M \in P} \phi_c(M) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{\pi_1, \dots, \pi_m \\ N = \dot{\cup} \pi_i}} \prod_{i=1}^m \phi_c(\pi_i) \end{aligned}$$

wobei das Symbol $\dot{\cup}$ für "disjunkte Vereinigung" steht. Wir summieren nun zuerst über Mengen $M_1, \dots, M_M$ festgehaltener Größe $n_1, \dots, n_m$, um anschließend über $n_1, \dots, n_m$ zu summieren:

$$\phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_m=1 \\ \sum n_i = n}}^{\infty} \sum_{\substack{|\Pi_i| = n_i \\ N = \dot{\cup} \Pi_i}} \prod_i \phi_c(\Pi_i)$$

Einsetzen in Z ergibt, nach Vertauschen diverser Summationen

$$Z = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_m=1 \\ \sum n_i = n}}^{\infty} \sum_{\substack{|\Pi_i| = n_i \\ N = \dot{\cup} \Pi_i}} \prod_{i=1}^m \left[\sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n_i}} \phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_i}) \prod_{k=1}^{n_i} z(\gamma_k) \right]$$

An dieser Stelle können wir die Summe über M_1 bis M_m ausführen

$$\sum_{\substack{|\Pi_i| = n_i \\ N = \dot{\cup} \Pi_i}} 1 = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} Z &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \left[\sum_{n_i=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n_i}} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_i})}{n_i!} \prod_{k=1}^{n_i} z(\gamma_k) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{n!} \prod_{k=1}^n z(\gamma_k) \right] \end{aligned}$$

womit der Satz B.1 im Sinne formaler Potenzreihen bewiesen ist. ■

Als nächstes betrachten wir die Konvergenz der Mayer-Entwicklung (B.3). Wir führen für jedes Polymer $\gamma \in \Gamma_0$ eine Größe $|\gamma| \in \mathbb{N}_0$, $|\gamma| \geq 1$ ein. Für eine Teilmenge $\Gamma \subset \Gamma_0$ definieren wir $|\Gamma| = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma|$. Es gelte nun die folgende

Annahme B.2

$$Q = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{d!} \sup_{\gamma \in \Gamma_0} \frac{1}{|\gamma|} \sum_{\substack{\gamma' \in \Gamma_0 \\ \gamma' \neq \gamma}} |\gamma'|^d |z(\gamma')| < 1 \quad (\text{B.4})$$

Satz B.3:

Unter der Annahme B.2 ist die Mayer-Entwicklung (B.3) absolut konvergent. Allgemeiner gilt für $Q < 1$ und beliebige Teilmengen $\Gamma \subset \Gamma_0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{|\Phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)|}{n!} \prod_{i=1}^n |z(\gamma_i)| &\leq \\ &\leq |\Gamma| \frac{Q}{1-Q} \end{aligned}$$

wobei die Summe $\sum'$ über Folgen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geht, für die zumindestens ein γ_i mit Γ inkompatibel ist.

Bemerkung:

In der hier vorliegenden Form stammt der Satz B.3 von Brydges [1984], der Beweis lehnt sich ergan [Cammarota, 1982] an. Etwas schwächere Konvergenzresultate wurden jedoch schon viel früher erzielt, siehe z.B. [Groeneveld, 1962], [Gruber, Kunz, 1971] und [Malyshev, 1979].

Zum Beweis von Satz B.3 benötigen wir

Lemma B.4 [Rota, 1964]

$|\phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)|$ ist durch die Zahl der Bäume $T_n \in G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ nach oben beschränkt.

Beweis: siehe z.B. [Seiler, 1982].

Beweis von Satz B.3

Mit Lemma B.4 können wir die linke Seite von (B.5) durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \sum_{T_n \in G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} \prod_{i=1}^n |z(\gamma_i)|$$

abschätzen, wobei die letzte Summe über in $G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ enthaltene Bäume T_n geht. Als nächstes vertauschen wir die letzten beiden Summen und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{T_n} \omega(T_n)$$

wobei T_n nun über alle Bäume auf n Vertices geht und

$$\omega(T_n) := \sum_{\substack{\gamma_1, \dots, \gamma_n \\ T_n \in G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}} \prod_{i=1}^n |z(\gamma_i)|$$

ist. Es sei nun d_i die Zahl der Linien in T_n , die in den Vertex i münden und

$$M_d := \sup_{\gamma} \frac{1}{|\gamma|} \sum_{\gamma' : \gamma' \rightarrow \gamma} |\gamma'|^d |z(\gamma')| \quad (\text{B.6})$$

Dann gilt offenbar

$$\omega(T_n) \leq n! \prod_{d_1} \prod_{i=2}^n \prod_{d_i-1}$$

Nach Cayley's Formel ist die Zahl der Bäume auf n Vertizes mit festen d_i 's gleich

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!} \leq \frac{(n-1)!}{d_1! (d_2-1)! \cdots (d_n-1)!}$$

und damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{T_n} \omega(T_n) &\leq |\Gamma| \sum_{d_1, \dots, d_n \geq 1} n! \frac{n_{d_1}}{d_1!} \prod_{i=2}^n \frac{n_{d_i-1}}{(d_i-1)!} \\ &\leq |\Gamma| n! Q^n \end{aligned}$$

unter Ausnutzung von (B.4) und (B.6). Hiermit folgt sofort (B.5). ■

Es erweist sich manchmal als praktisch, die folgende Multiindex-Notation einzuführen: es sei Γ_0 eine endliche oder eventuell abzählbar unendliche Menge von Polymeren. Ein Multiindex über Γ_0 ist dann eine Funktion X von Γ_0 in die nicht-negativen, ganzen Zahlen $\mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft, daß $n(X) := \sum_{\gamma \in \Gamma_0} X(\gamma) < \infty$ ist. Man setzt

$$\begin{aligned} X! &= \prod_{\gamma \in \Gamma_0} X(\gamma)! & |X| &= \sum_{\gamma \in \Gamma_0} |\gamma| X(\gamma) \\ z^X &= \prod_{\gamma \in \Gamma_0} z(\gamma)^{X(\gamma)} \end{aligned}$$

Es sei Γ eine Folge von Polymeren, die jedes Polymer $\gamma \in \Gamma_0$ genau $X(\gamma)$ mal enthält. Dann definiert man

$$\phi(X) := \phi(\Gamma)$$

$$\phi_c(X) := \phi_c(\Gamma)$$

Für den Multiindex $X = 0$ (d.h. $X(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$) setzt man $\phi = 1$ und $\phi_c = 0$. Man schreibt für einen Multiindex X und eine Menge $\Gamma' \subset \Gamma$, $\Gamma' \neq X$, wenn es ein $\gamma \in \Gamma'$ mit $X(\gamma) > 0$ gibt, so daß $\gamma \notin \Gamma'$ ist.

Mit diesen Notationen wird aus (B.1), (B.3) und (B.5) offenbar

$$Z = \sum_X \frac{z^X}{X!} \phi(X) \quad (B.7)$$

$$\log Z = \sum_X \frac{z^X}{X!} \phi_c(X) \quad (B.8)$$

und

$$\sum_{X \neq \Gamma} \left| \frac{z^X}{X!} \phi_c(X) \right| \leq |\Gamma| \frac{Q}{1-Q} \quad (B.9)$$

Man beachte, daß man die Fakultäte $X!$ in (B.7) auch weglassen kann, da $\phi(X)$ nur für $X! = 1$ verschieden von Null ist.

Anhang C: Die Konvergenz der Clusterentwicklung für symmetrische Gitter

In diesem Abschnitt möchte ich die Konvergenz der Clusterentwicklung aus Kapitel 1 beweisen; wieder sind die Ergebnisse im Prinzip wohlbekannt. Die in der Literatur vorliegenden Beweise sind jedoch nicht immer ganz fehlerfrei.

Lemma C.1:

Es sei Γ eine endliche Menge von gewöhnlichen Polymeren (siehe Abschnitt 1.2). Dann ist die Zahl der gewöhnlichen Polymere γ , die mit Γ inkompatibel sind und eine vorgegebene Größe s haben, durch $|\Gamma| K_0^s$ nach oben beschränkt, wobei K_0 nur von der Raumzeitdimension $\gamma = d + 1$ abhängt.

Der Beweis ist eine bekannte Konsequenz aus der Lösung des Königsberger Brückenproblems und kann beispielsweise in [Seiler, 1982] nachgelesen werden.

Es sei nun $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm und $r = \sup_p \|S_p\|$. Dann ist

$$\|g_p\| \leq e^r - 1 =: e^{-b}$$

und somit für gewöhnliche Polymere

$$|z_\Lambda(\gamma)| \leq e^{-b|\gamma|} \quad (\text{C.1})$$

Aus (C.1), Lemma C.1 und Satz B.3 folgt aber sofort die absolute Konvergenz der Mayer-Entwicklung (1.16) für große g^2 . Es sei nämlich

$$b_0 := \log K_0 + \log 2e \quad (\text{C.2})$$

und g^2 sei so groß gewählt, daß $b > b_0$ ist. Dann ist

$$Q \leq \sum_{d=0}^{\infty} \frac{1}{d!} \sum_{n=1}^{\infty} n^d K_0^n e^{-b n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (K_0 e^{1-b})^n = \frac{K_0 e^{1-b}}{1 - K_0 e^{1-b}} < 1$$

und somit ist (1.16) gemäß Satz B.3 konvergent.

Als nächstes beweise ich Lemma 1.1 aus Kapitel 1. Ich benötige das folgende

Lemma C.2

Es sei A Observable über Λ , $N_A = |\text{supp}(A)|$ und

$$|z_{A,\Lambda}(\gamma)| \leq \|A\|^{n(\gamma)} e^{-b|\gamma|} \quad (C.3)$$

Dann gilt

i) für ein festgewähltes A-Polymer γ_A und für $s \geq 1$ ist

$$\sum_{\gamma}' |z_{A,\Lambda}(\gamma)| \leq (|\gamma_A| + N_A) (K_0 e^{-b})^s$$

wobei die Summe $\sum'$ über gewöhnliche Polymere γ mit $|\gamma| = s$, $\gamma \neq \gamma_A$ geht.

ii) für $b > b_0$ ist

$$\sum_{\gamma: n(\gamma)=1} |z_{A,\Lambda}(\gamma)| e^{|\gamma|} \leq \|A\| 2^{N_A}$$

Beweis:

i) ist eine evidente Folge von Lemma C.1.

- ii) Es seien $\ell_1, \dots, \ell_{N_A}$ die Links in $\text{supp}(A)$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß jedes A -Polymer genau N_A Zusammenhangskomponenten $\gamma_1, \dots, \gamma_{N_A}$ hat (einige sind möglicherweise leer) und daß γ_i mit ℓ_i zusammenhängt. (C.3) in Kombination mit Lemma C.1 ergibt dann

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma: n(\gamma)=1} |z_{A,\Lambda}(\gamma)| e^{|\gamma|} &\leq \\ &\leq \|A\| \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_{N_A} \geq \emptyset} (K_0 e^{1-b})^{\sum \gamma_i} \\ &= \|A\| (1 - K_0 e^{1-b})^{-N_A} < \|A\| 2^{N_A} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $b > b_0$ ausgenutzt haben. ■

Wir können nun die Konvergenz der Clusterentwicklung für $\langle A \rangle_\Lambda$ beweisen. Im folgenden Lemma bezeichnet Σ' wie schon in Kapitel 1 eine Summe über Terme linear in A .

Satz C.3 ("Lemma 1.1")

Es sei $N_A = |\text{supp}(A)|$ und es gelte

$$|z_{A,\Lambda}(\gamma)| \leq \|A\|^{n(\gamma)} e^{-b|\gamma|}$$

Es sei b_0 gemäß (C.2) gewählt. Dann ist für $b > b_0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \frac{|\Phi_c(\gamma_1, \dots, \gamma_n)|}{n!} \prod_{i=1}^n |z_{A,\Lambda}(\gamma_i)| \\ \leq \|A\| (2e)^{N_A} \left[1 - \frac{1}{2e^{b-b_0} - 1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Beweis

Wir verfahren zunächst wie im Beweis von Satz B.3 und erhalten die obere Schranke

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{T_n} \omega(T_n)$$

$$\left(\omega(T_n) = n \sum_{\gamma_1} |z_{A,1}(\gamma)| \sum_{\gamma_2, \dots, \gamma_n}'' \prod_{i=2}^n |z_{A,1}(\gamma_i)| \right)$$

$T_n \in G(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

für die linke Seite. Die Summe Σ'' geht dabei über gewöhnliche Polymere.

Im folgenden schieben wir die Summe über γ_1 und d_1 (in der Summe über T_n) auf und erhalten, unter Verwendung von Lemma C.2, i)

$$\begin{aligned} \sum_{T_n} \omega(T_n) &\leq \\ &\leq n! \sum_{\gamma_1} \sum_{d_1 \geq 1} |z_{A,1}(\gamma_1)| \frac{(|\gamma_1| + N_A)^{d_1}}{d_1!} Q^{n-1} \\ &\leq n! Q^{n-1} \sum_{\gamma_1} e^{|\gamma_1| + N_A} |z_{A,1}(\gamma_1)| \end{aligned}$$

Wir wenden schließlich Lemma C.2, ii) sowie die Ungleichung

$$Q \leq \frac{k_0 e^{1-b}}{1 - k_0 e^{1-b}} = \frac{1}{2e^{b-b_0} - 1}$$

an und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{T_n} \omega(T_n) &\leq \\ &\leq \|A\| (2e)^{N_A} \left[1 - \frac{1}{2e^{b-b_0} - 1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Ich beweise schließlich noch Satz 1.6 aus Abschnitt 1.3, unter Verwendung von Lemma 1.4 und 1.5. Es sei also C eine geschlossene, doppelpunktsfreie Schleife, q eine Darstellung, die das Zentrum $Z(G)$ nicht trivial darstellt und $A(C)$ sei die Größe der minimalen Γ -Fläche, die man in C einspannen kann (Γ ist die duale Gruppe zu $Z(G)$). Dann gilt

Satz C.4 ("= Satz 1.6)

Es sei $r = \sup_p \|S_p\|$, $b = -\log(e^r - 1)$ und $\varepsilon = K_0 e^{1-b}$. Dann ist für $b > b_0$

$$\langle W_q(C) \rangle_1 \leq \frac{\chi_q(1)}{1-2\varepsilon} \varepsilon^A(C)$$

Beweis:

Es sei $A = W_q(C)$. Dann verbessert sich Lemma C.2,i) zu

$$\sum_{\gamma} |z_{A,1}(\gamma)| \leq |\gamma_A| (K_0 e^{-b}) \quad (C4)$$

da nach Lemma 1.4 jedes gewöhnliche Polymer γ , welches mit $\tilde{\gamma}_A \cup \text{supp}(A)$ zusammenhängt¹, auch mit $\tilde{\gamma}_A$ zusammenhängt. Weiter verbessert sich ii) zu

$$\sum_{\gamma: n(\gamma)=1} |z_{A,1}(\gamma)| e^{|\gamma|} \leq \|A\| \frac{\varepsilon^{A(C)}}{1-\varepsilon} \quad (C.5)$$

wobei wir ausnutzen, daß einerseits $\tilde{\gamma}$ nur eine Zusammenhangskomponente besitzt (Lemma 1.4) und andererseits $|\tilde{\gamma}| \geq A(C)$ ist (Lemma 1.5), sofern $n(\gamma) = 1$ und $A = W_q(C)$ ist.

Wir verfahren nun wie im Beweis von Satz C.3, nur verwenden wir (C.4) und (C.5) anstelle von Lemma C.2. Es ergibt sich die Schranke

$$\begin{aligned} |\langle W_q(C) \rangle_1| &\leq \frac{1}{1-Q} \chi_q(1) \frac{\varepsilon^{A(C)}}{1-\varepsilon} \\ &\leq \left[1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]^{-1} \frac{\chi_q(1)}{1-\varepsilon} \varepsilon^{A(C)} \\ &= \frac{\chi_q(1)}{1-2\varepsilon} \varepsilon^{A(C)} \end{aligned}$$

¹ Ich rufe in Erinnerung, daß ich in Kapitel 1 zwischen dem Polymer $\gamma_A = (n_A, \tilde{\gamma}_A)$ und der Menge $\tilde{\gamma}_A$ von Plaketten unterschieden habe.

Anhang D: Peter-Weyl-Theorem

In diesem Anhang formuliere ich das Peter-Weyl-Theorem und einige Aussagen über die gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Entwicklungen. Für die Beweise sei auf [Pontrjagin, 1957] oder [Hewitt, Ross, 1970] verwiesen. G ist stets eine kompakte² topologische Gruppe, dg bezeichnet das Haarmaß über G und $(f, h) := \int f(g) \overline{h(g)} dg$. Die Begriffe Orthonormalsystem und vollständiges Orthonormalsystem beziehen sich auf den Hilbertraum $L^2(dg)$.

Unter einer linearen Darstellung von G versteht man eine homomorphe Abbildung $g \mapsto U^g(g)$ von G in eine topologische Gruppe von (reellen oder komplexen) Matrizen einer festen Ordnung. Die Ordnung r der Matrix $U(g) = (U^{ab}(g))_{a,b=1,\dots,r}$ heißt Grad der Darstellung U . Zwei Darstellungen U, U' von gleichem Grad heißen äquivalent, wenn es eine symmetrische Matrix T gibt, so daß $TU'(g) = U(g)T$ ist. Man beachte, daß es zu jeder komplexen Darstellung von G eine äquivalente unitäre gibt.

Es sei $D(G)$ die Menge der irreduziblen, unitären Darstellungen von G und $\hat{G}$ indiziere die Äquivalenzklassen aus $D(G)$. Für jedes $Q \in \hat{G}$ sei ein Vertreter U_Q aus der entsprechenden Äquivalenzklasse ausgewählt, d_Q sei der Rang der Darstellung U_Q und $\chi_Q(g) := \text{Tr } U_Q(g)$. Δ bezeichne das System der Funktionen $d_Q^{1/2} U_Q^{ab}$ und Δ' das System der Charaktere $\chi_Q(\cdot)$ ($Q \in \hat{G}$, $a, b = 1, \dots, d_Q$). Für $f \in L^2(dg)$ nennt man

$$\hat{f}_Q^{ab} = \int U_Q^{ab}(g) f(g) dg \quad (D.1)$$

die Fourier-Koeffizienten von f bzgl. Δ .

²d.h. jedes offene Überdeckungssystem von G enthält ein endliches.
Pontrjagin benutzt den Begriff "bikompakt".

Satz D.1 (Peter-Weyl-Theorem):

Δ ist VONS. Es gilt also

$$i) \int \overline{U_Q^{ab}(g)} U_{Q'}^{cd}(g) dg = \delta_{QQ'} \delta^{ac} \delta^{bd} \frac{1}{d_Q} \quad (D.2)$$

ii) für $f \in L^2(dg)$ ist

$$f = \sum_{Q, a, b} d_Q \hat{f}_Q^{ab} U_Q^{ab}, \quad (D.3)$$

wobei die Summe in der L^2 -Norm bzgl. dg konvergiert.

Korollar D.2

$$i) \int \chi_Q(hg^{-1}) \chi_{Q'}(g) dg = \delta_{QQ'} \frac{1}{d_Q} \chi_Q(h) \quad (D.4)$$

ii) Für invariante Funktionen $f \in L^2(dg)$ (d.h. $f(g) = f(hgh^{-1})$ für fast alle $g, h \in G$) ist $\hat{f}_Q^{ab} = \delta^{ab} \hat{f}_Q$ mit

$$\hat{f}_Q = d_Q^{-1} \int \overline{\chi_Q(g)} f(g) dg \quad (D.5)$$

und es gilt

$$f = \sum_Q d_Q \hat{f}_Q \chi_Q \quad (D.6)$$

(Konvergenz in der L^2 -Norm).

Die nun folgenden Aussagen formuliere ich nur für invariante Funktionen. Die (in dieser Arbeit nicht benötigte) Verallgemeinerung für nicht invariante Funktionen findet sich beispielsweise in [Hewitt, Ross, 1970].

Bemerkung D.3:

Es sei $f \in L^1(\text{dg})$ eine invariante Funktion mit absolut konvergenter Fourierentwicklung

$$\sum_Q d_Q^2 |\hat{f}_Q| < \infty$$

Dann konvergiert

$$\sum_Q d_Q \hat{f}_Q \chi_Q$$

gleichmäßig (auf G) gegen eine stetige Funktion, die fast überall gleich f ist.

Satz D.4:

Einbe invariante, stetige Funktion ist genau dann positiv definit, wenn ihre Fourierkoeffizienten nicht negativ sind.

Satz D.5:

Es sei f invariant, stetig und positiv definit. Dann ist die Fourierentwicklung von f absolut konvergent und es gilt

$$\|f\|_\infty = f(1) = \sum_Q d_Q^2 \hat{f}_Q$$

Literaturverzeichnis

- Balaban, I.: Renormalization group approach to lattice gauge field theories. I. Harvard preprint, HUTMP/B 189, 1986.
- Behnke, H., Sommer F.: Theorie der analytischen Funktionen einer Veränderlichen. Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 77. Springer, Berlin, 1968.
- Borgs, C.: Translation symmetry breaking in four dimensional lattice gauge theories. Comm.Math.Phys. 96 (1984) 251.
- Borgs, C.: Area law for spatial Wilson loops in high-temperature lattice gauge theories. Nucl.Phys. B261 (1985) 455.
- Borgs, C., Nill, F (1986a): Symmetry breaking in Landau gauge: A comment to a paper by ZI. Kennedy and C. King. Comm.Math.Phys. 104 (1986) 349.
- Borgs, C., Nill, F. (1986b): private Diskussion, August 1986.
- Borgs, C., Seiler, E.: Lattice Yang-Mills theory at nonzero temperature and the confinement problem. Comm.Math.Phys. 91 (1983) 329.
- Bricmont, J., Fröhlich, J. (1985a): Statistical mechanical methods in particle structure analysis of lattice gauge field theories I. Nucl.Phys. B251 [FS 13] (1985) 517.
- Bricmont, J., Fröhlich, J. (1985b): Statistical mechanical methods in particle structure analysis of lattice gauge field theories II. Comm.Math.Phys. 98 (1985) 553.
- Bricmont, J., Lebowitz, J.L., Pfister, C.E.: Non translation invariant Gibbs states with coexisting phases. I-III Comm.Math.Phys. 66 (1979) 1, (zusammen mit E. Olivieri), Comm.Math.Phys. 66 (1979) 21 und Comm.Math.Phys. 69 (1979) 267.
- Brydges, D.: A short course on Cluster expansions. In: K. Osterwalder, R. Stora (Hg.) "Critical phenomena, random systems, gauge theories", Les Houches 1984. North Holland, Amsterdam, 1986.

- Cammarota, C.: Decay of correlations for infinite range interactions in unbounded spin systems. *Comm.Math.Phys.* 85 (1982) 517.
- Creutz, M.: Gauge fixing, the transfer matrix, and confinement on a lattice. *Phys.Rev.* D15 (1977) 1128.
- Dobrushin, R.L.: The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions on its regularity. *Theor.Prob.Appl.* 13, (1968) 197.
- Dobrushin, R.L.: Gibbs state describing coexistence of phases for a three dimensional Ising model. *Theor.Prob.Appl.* 17 (1972) 582.
- Domb, C., Green, M.S.: Phase transitions and critical phenomena, Vol. 3: series expansions for lattice models. Academic press, London, New York, 1974.
- Federbush, P.: To Yang-Mills QFT, $d=4$, through Phase-Cells by 93 or before. Stempel auf den Veröffentlichungen von Federbush zum Thema: "A Phase-Cell approach to Yang-Mills Theory".
- Feldman, J., Magnen, J., Rivasseau, V., Sénéor, R.: Massive Gross-Neveu model: a rigorous perturbative construction. *Phys.Rev.Lett.* 54 (1985) 1479; siehe auch: A renormalizable field theory: the massive Gross-Neveu model in two dimensions. *Comm.Math.Phys.* 103 (1986) 67.
- Gallavotti, G.: The phase separation line in the two-dimensional Ising model. *Comm.Math.Phys.* 27 (1972) 103.
- Gallavotti, G., Guerra, F., Miracle Solé, S.: A comment to a talk by E. Seiler. In: G. dell'Antonio, S. Doplicher, G. Jona-Lasino (Hg.) "Mathematical problems in theoretical physics", Rom 1977. Lecture Notes in Physics 80, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- Gawedzki, K.: Yang Mills theory as Schrödinger quantum mechanics on the space of gauge-group orbits. *Phys.Rev.* D26 (1982) 3593.
- Gawedzki, K., Kupianen, A.: Exact renormalization of the Gross-Neveu model of quantum fields. *Phys.Rev.Lett.* 54 (1985) 2191; siehe auch: Gross-Neveu model through convergent perturbation expansion. Helsinki preprint, 1985.

